

Министерство сельского хозяйства российской федерации
Федеральное государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования (ФГОУ ВПО)
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

Электронный практикум по дискретной математике

для студентов факультета «Прикладная информатика»

Краснодар-2013

Практическое занятие №1. Операции над множествами

Цель занятия:

1. изучить способы задания множеств;
2. получить навыки в применении операций над множествами.

Множества можно задавать двумя способами:

1. перечислением элементов множества.

Например, множество $M = \{x, y, z\}$ состоит из трёх элементов, порядок перечисления которых не имеет значения, т.е. $\{x, y, z\} = \{y, x, z\} = \dots$

2. описанием элементов множеств:

- *описанием характеристических свойств*, объединяющих элементы в виде уравнений, диаграмм Эйлера-Венна и геометрически. Например, множество $M = \{x^2 \in \mathbb{N}; x - \text{простое число}\}$ задано квадратами простых чисел.

- *описанием множеств, порожденных процедурами над элементами*, означает указание алгоритма порождения элементов этого множества.

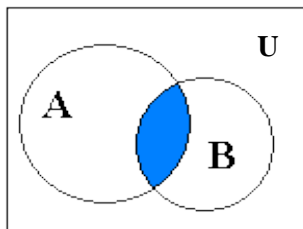
Например, подмножество M всех нечетных натуральных чисел с помощью порождающей процедуры имеет вид: $M = \{x \in \mathbb{N}; x = 1 + 2n, n \in \mathbb{N}\}$

Операции над множествами

Рассмотрим операции над множествами в порядке убывания приоритета.

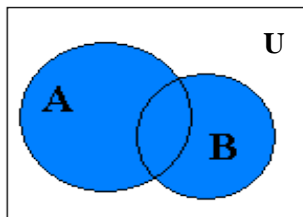
Пересечением (произведением) двух множеств называется множество C , состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.

Обозначение: $C = A \cap B$



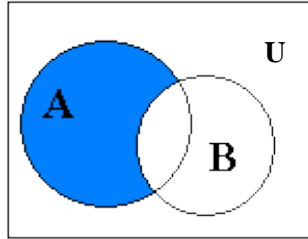
Объединением (суммой) двух множеств A и B называется множество C , состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (или тому и другому вместе).

Обозначение: $C = A \cup B$



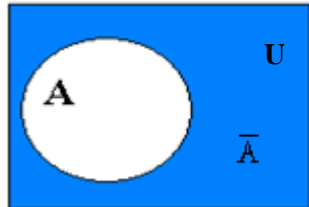
Разностью множеств A и B называется такое множество C , которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B .

Обозначение: $C = A \setminus B$ или $C = A \setminus B$



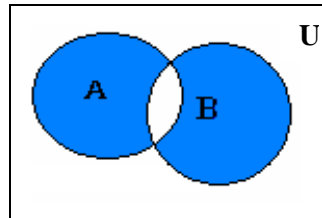
Дополнением множества A до универсального множества U называется множество C , равное разности $U \setminus A$.

Обозначение: $C = U \setminus A$ или $C = \bar{A}$



Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество $C = A \cup B \setminus A \cap B$.

Обозначение: $C = A \Delta B$



Формула включений и исключений

для двух множеств A и B :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

для трех множеств A , B и C :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

где $n(Z)$ – количество элементов множества Z , т.е. его *мощность*.

Примеры выполнения заданий

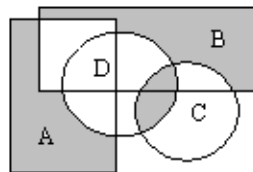
1. Заданы множества: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Найдите элементы множеств: $D = A \setminus B$ и $E = A \cap B$.

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $E = \{1, 3, 5\}$.

2. Представьте заштрихованные области формулами теории множеств

Решение: $D = (A \Delta B) \setminus (D \Delta C)$



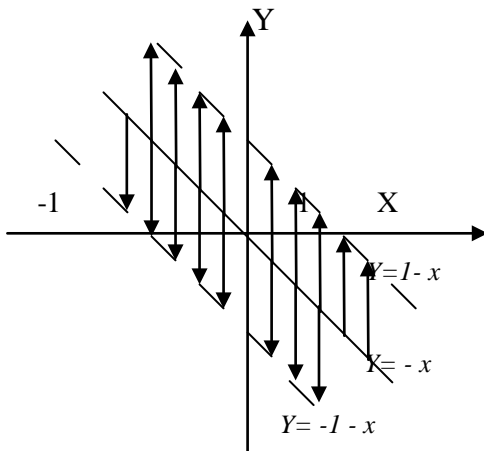
3. Пусть (x, y) – координаты точек плоскости. Укажите итриховкой множество:

$A = \{(x, y) \mid x + y < 1\}$.

Решение:

$$|x+y| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x+y < 1 \\ x+y < 0 \\ -(x+y) < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x \\ y < 1-x \\ y < -x \\ y > -1-x \end{cases}$$



Задания для самостоятельного выполнения

1. Задайте множество A перечислением его элементов:

0) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 6x + 5) \cdot (x^2 - x - 12) = 0\}$

2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x + 4) \cdot (x^2 - x - 6) = 0\}$

4) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 3x - 4) \cdot (x^2 + x - 12) = 0\}$

6) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 7x + 6) = 0\}$

8) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = 0\}$

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + x - 20) = 0\}$

3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 4x - 5) \cdot (x^2 - 7x + 12) = 0\}$

5) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x - 6) \cdot (x^2 - x - 6) = 0\}$

7) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3x - 4) \cdot (x^2 - 9x + 20) = 0\}$

9) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - x - 2) \cdot (x^2 - x - 20) = 0\}$

2. Заданы множества: $A = \{1, 3, 9, 10, 8\}$, $B = \{5, 3, 11, 4, 8\}$ и $C = \{1, 4, 8, 9, 10\}$. Найдите элементы множеств D и E :

0) $D = A \cup B \cap C$; $E = (A \Delta B) \mid C$;

2) $D = A \cup B \cup C$; $E = A \cap C \Delta B$;

4) $D = (A \cup C) \mid B$; $E = (B \Delta C) \mid A$;

1) $D = (A \cup C) \mid (B \cap C)$; $E = A \mid B \cap C$;

3) $D = (A \cup C) \cap B$; $E = A \Delta B \cup C$;

5) $D = A \cap B \cap C$; $E = C \Delta B \mid A$;

6) $D = A \cup (B \Delta C); E = A \mid B \mid C;$

7) $D = (B \cup C) \mid (A \cap C); E = A \cup B \mid C;$

8) $D = (A \cup B) \cap C; E = A \Delta B \mid C;$

9) $D = (A \cup B) \Delta C; E = A \cap B \mid C;$

3. Пусть (x, y) - координаты точек плоскости. Укажите штриховкой множества $A \cap B$ и $A \cup B$:

0) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\};$

$B = \{(x, y) \mid |x + 2y| < 3\}$

1) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\};$

$B = \{(x, y) \mid |4x - y| \leq 2\};$

2) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\};$

$B = \{(x, y) \mid |4y + x| > 1\};$

3) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 25\};$

$B = \{(x, y) \mid |2x + 2y| > 5\};$

4) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\};$

$B = \{(x, y) \mid |3x + y| < 6\};$

5) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\};$

$B = \{(x, y) \mid |x + 3| \geq 1\};$

6) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 36\}; B = \{(x, y) \mid |x + y| \geq 2\};$

7) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 9\};$

$B = \{(x, y) \mid |2x - y| \leq 1\};$

8) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 16\}; B = \{(x, y) \mid |x - 3y| > 5\};$

9) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 36\};$

$B = \{(x, y) \mid |x + 4y| < 8\};$

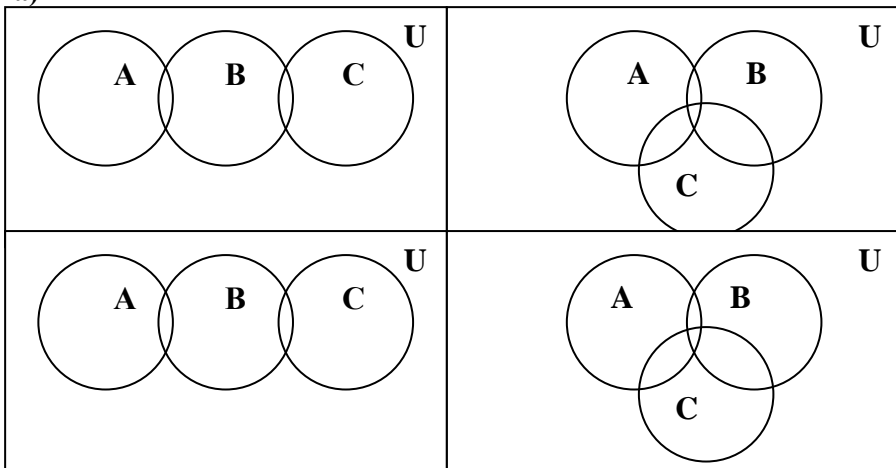
Практическое занятие №2. Операции над множествами

Задания для самостоятельного выполнения

1. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна в двух вариантах расположения следующие множества:

- 0) а) $U \mid \overline{A \cup B \cup C}$; 1) а) $C \cup A \mid \overline{B}$; 2) а) $(A \Delta B) \mid C$;
 б) $\overline{A} \cap B \mid C$; б) $(A \mid B) \cup C$; б) $\overline{A \cup B} \cap C$;
 3) а) $A \cap B \mid C$; 4) а) $\overline{A \cup B} \mid C$; 5) а) $\overline{A} \cap \overline{B} \mid C$;
 б) $A \cap B \cup C \mid A$; б) $(B \mid A) \cap C$; б) $\overline{A \cap B} \mid C$;
 6) а) $C \mid A \cup B$; 7) а) $U \mid \overline{A \cap B \cap C}$; 8) а) $A \mid (B \Delta C)$;
 б) $\overline{A} \cap (B \Delta C)$; б) $C \cap A \mid \overline{B}$; б) $C \mid A \cap B$;
 9) а) $(A \cup B) \cap (B \Delta C)$;
 б) $A \cup B \mid C$;

а)



Законы теории множеств

$$\begin{aligned}
 A \cup B &\equiv B \cup A; \\
 A \cap B &\equiv B \cap A; \\
 A \cup (B \cup C) &\equiv (A \cup B) \cup C; \\
 A \cap (B \cap C) &\equiv (A \cap B) \cap C; \\
 A \cap (B \cup C) &\equiv (A \cap B) \cup (A \cap C); \\
 A \cup (B \cap C) &\equiv (A \cup B) \cap (A \cup C); \\
 A \cup U &\equiv U; \\
 A \cap U &\equiv A; \\
 A \cup \bar{A} &\equiv U;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \cup \emptyset &\equiv A; \\
 A \cap \emptyset &\equiv \emptyset; \\
 A \cap \bar{A} &\equiv \emptyset; \\
 A \cup A &\equiv A; \\
 A \cap A &\equiv A; \\
 \overline{A \cup B} &\equiv \bar{A} \cap \bar{B}; \\
 \overline{A \cap B} &\equiv \bar{A} \cup \bar{B}; \\
 A \cup (A \cap B) &\equiv A; \\
 A \cap (A \cup B) &\equiv A
 \end{aligned}$$

Равносильности теории множеств

$$\begin{aligned}
 A \mid B &\equiv A \cap \bar{B}; \\
 A \mid A &\equiv \emptyset; \\
 A \mid (B \cup C) &\equiv (A \mid B) \cap (A \mid C); \\
 A \mid (B \cap C) &\equiv (A \mid B) \cup (A \mid C); \\
 (A \cap B) \mid C &\equiv (A \mid C) \cap (B \mid C); \\
 (A \cup B) \mid C &\equiv (A \mid C) \cup (B \mid C); \\
 A \mid (A \mid B) &\equiv A \cap B; \\
 A \mid (B \mid C) &\equiv (A \mid B) \cup (A \cap C); \\
 (A \mid B) \mid C &\equiv A \mid B \cup C; \\
 A \Delta B &\equiv B \Delta A; \\
 A \Delta B &\equiv A \cup B \mid A \cap B; \\
 A \Delta B &\equiv (A \mid B) \cup (B \mid A); \\
 A \Delta (B \Delta C) &\equiv (A \Delta B) \Delta C; \\
 A \cap (B \Delta C) &\equiv (A \cap B) \Delta (A \cap C).
 \end{aligned}$$

Примеры выполнения заданий

1. Докажите теоретико-числовое равенство: $\overline{\overline{YUX} \cap X \cap YUZ} \equiv Z$
 $\overline{YUX} \cap X \cap YUZ \equiv (YUX \cup \bar{X} \cup \bar{Y}) \cap Z \equiv U \cap Z \equiv Z$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Докажите тождества:

0) $X \cup \overline{X \cap Y \cup Z} \equiv Z \cup X$

$\overline{Z \cup X} \cap Y \cup \bar{X} \equiv \bar{X} \cap \bar{Z}$

$X \cap \bar{Y} \cup Z \mid \bar{Y} \equiv Z \mid \bar{Y}$

$Y \mid (X \cap \bar{Y} \cup Z) \equiv \emptyset;$

2) $\bar{X} \cap Y \cap Z \cup X \cap Z \equiv (X \cup Y) \cap Z$

1) $X \cap Y \cap (X \cap Z \cup X \cap Y \cap Z \cup \bar{Z} \cap \bar{Y}) \equiv X \cap Y \cap Z$

$X \cap \bar{Y} \cap (Z \cup \bar{X}) \equiv Y \cup \bar{X} \cup \bar{Z}$

$(X \mid (X \mid \bar{Y})) \cup (\bar{X} \mid (\bar{X} \mid \bar{Y})) \equiv \bar{Y}$

$\bar{X} \cap (\bar{Z} \mid X \cup \bar{Z}) \equiv \emptyset;$

3) $X \cap Y \cup X \cap Y \cap Z \cup X \cap Y \cap Z \cup X \cap Y \cap Z \equiv$

$$\begin{aligned} X \cup \overline{Y \cap \overline{Z} \cup \overline{X}} &= X \cup \overline{Z} \cup \overline{Y} \\ Y | (Y | X \cup \overline{Y}) &= Y \cap X \\ (\overline{Z} \cap \overline{X} | X) | \overline{Z} &= \emptyset; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \overline{X} \cup Y \cap Z \cup \overline{Y} \cup \overline{X} \cup \overline{Z} &= U \\ \overline{X} \cap \overline{Y \cup X \cap \overline{Z}} &= \overline{Y} \cap \overline{X} \\ \overline{Y \cap \overline{Z}} | \overline{Z} &= Z | Y \\ X | (X | Y \cup \overline{X}) &= \emptyset; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad \overline{X \cup \overline{Z} \cup \overline{X} \cap Y} &= U \\ \overline{X \cup \overline{Y} \cup \overline{Z} \cup \overline{X} \cup \overline{Y}} &= X \cap Y \\ \overline{Y \cap \overline{Z}} | \overline{Y \cap \overline{X}} &= X \cap \overline{Z} \cap Y \\ \overline{X} \cap (\overline{Y \cup Z}) \cap X \cap Y &= \emptyset; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad X \cup X \cap \overline{Y} \cup X \cap Z &= U \\ \overline{Z \cap (X \cup Z \cap Y)} \cup \overline{X} &= \overline{X} \cup \overline{Z} \\ X \cup \overline{Z} \cap (Y | \overline{X}) &= X \\ \overline{X \cup Y \cap Z} | \overline{X} \cup \overline{Z} &= \emptyset; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \cap Y \\ \overline{X \cup (\overline{Y} \cup Z) \cup X \cap \overline{Y}} &= X \cap \overline{Z} \cap Y \\ (X | \overline{X \cup \overline{Y}}) | \overline{Y} &= X \\ (X \cap \overline{Y}) | (\overline{X} \cup \overline{Y}) &= \emptyset; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad ((X \cup Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})) \cap \overline{X \cup Y} &= X \cap \overline{Y} \\ \overline{X \cap Y \cap \overline{Z} \cup X} &= (\overline{Y} \cup Z) \cap \overline{X} \\ X | Y \cup X \cap Z &= X | Y \cap \overline{Z} \\ \overline{X \cup (Y \cap Z \cup \overline{X})} &= \emptyset; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad (X \cup Y \cup Z) \cap (X \cup Y) \cup Z &= X \cup Z \cup Y \\ \overline{X \cap Y \cap (Z \cap X \cup Y)} &= \overline{X} \cup \overline{Y} \\ Y | (X \cap Y | \overline{Y}) &= Y | X \\ \overline{X \cup Y} | \overline{X} \cup Y &= \emptyset; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) \quad (X \cup Z) \cap (X \cup Y) \cap (Y \cap Z) &= Y \cap Z \\ \overline{X \cup \overline{Y} \cap Z} \cap \overline{X \cap \overline{Z}} &= (Y \cup \overline{Z}) \cap \overline{X} \\ (\overline{X \cap \overline{Z}} | \overline{X \cup Y}) | \overline{X} &= X | Z \\ \overline{\overline{X} \cup Y \cap \overline{X}} &= \emptyset; \end{aligned}$$

Практическое занятие №3. Отображения и отношения

Цель занятия:

1. изучить виды и суперпозиции отображений; виды отношений, заданные на множествах;
2. получить навыки в вычислении декартового произведения.

Пусть X и Y - два множества. Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие некоторый элемент $f(x)$ множества Y , то говорят, что задано *отображение* f из множества X в множество Y .

Обозначение: $f: X \rightarrow Y$. При этом, если $f(x) = y$, то элемент y называется *образом* элемента x при отображении f , а элемент x называется *прообразом* элемента y при отображении f^{-1} .

Отображение $f: X \rightarrow Y$ является *сюръективным*, если каждый элемент $y \in Y$ имеет хотя бы один прообраз.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *инъективным*, если для любого элемента $y \in Y$ существует не более одного прообраза. Если отображение f сюръективно и инъективно одновременно, то оно называется *биективным* (*взаимно однозначным соответствием*).

Пусть $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ - два отображения. Зададим правило h , применение которого к элементу x из X состоит в том, что мы применяем к x правило f , затем к результату $f(x)$ применяем второе правило g , получая в итоге $g(f(x))$. То есть $h(x) = g(f(x))$. Полученное отображение $h: X \rightarrow Z$ называют *композицией* отображений g и f и обозначают $h = g \circ f$. Тогда $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Декартово произведение двух множеств A и B - множество упорядоченных пар $\langle a, b \rangle$ таких, что $a \in A$ и $b \in B$. Мощность декартова произведения равна произведению мощностей исходных множеств.

Бинарное отношение множеств A и B - подмножество декартова произведения A на B . *Область определения отношения (левая область отношения)* - множество всех первых элементов пар отношения. *Область значений отношения (правая область отношения)* - множество всех вторых элементов пар отношения.

Отношение эквивалентности - отношение, являющееся одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным. *Рефлексивное* отношение на множестве A - отношение, которое справедливо для каждого элемента множества A как отношение этого элемента к самому себе. Например $=$, \geq - рефлексивные, \neq , $>$ - нереклексивные.

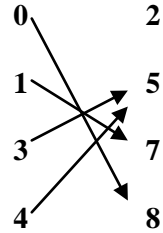
Симметричное отношение - отношение, результат которого не меняется при перестановке операндов. *Транзитивное* отношение на множестве A - такое отношение, из справедливости которого для первого и второго операнда и справедливости для второго и третьего операнда следует справедливость этого отношения для первого и третьего операндов, при условии, что все операнды являются любыми элементами множества A .

Класс эквивалентности R - набор элементов множества, для которых эквивалентное отношение R будет давать одинаковый результат.

Примеры выполнения заданий

1. Для отображения $f: \{0,1,3,4\} \rightarrow \{2,5,7,8\}$,

заданного рисунком, найдите $f(\{0,3\})$, $f(\{1,3,4\})$,
 $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(\{2,5\})$, $f^{-1}(\{5,8\})$.



Решение: $f(\{0,3\}) = \{5, 8\}$;
 $f(\{1,3,4\}) = \{5, 7\}$;
 $f^{-1}(2) = \{\emptyset\}$;
 $f^{-1}(\{2,5\}) = \{3, 4\}$;
 $f^{-1}(\{5,8\}) = \{0, 3, 4\}$

2. Выясните, к какому типу относится заданное отображение f :
 $A = \{a, b, c\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$; $f: a \rightarrow 2$; $b \rightarrow 4$; $b \rightarrow 6$; $c \rightarrow 8$;

Решение: находим образы: $y = f(x)$

$$f(a) = 2; f(b) = \{4, 6\}; f(c) = 8$$

Находим прообразы: $x = f^{-1}(y)$

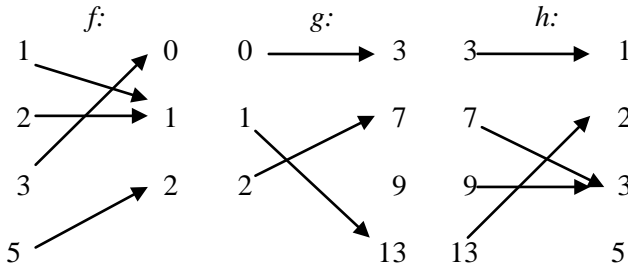
$$f^{-1}(2) = a; f^{-1}(4) = b; f^{-1}(6) = b; f^{-1}(8) = c;$$

Все элементы из B имеют прообразы, значит f – сюръективно.

Т.к. элементы 4 и 6 имеют равные прообразы, то f – неинъективно

Следовательно, заданное отображение не является биективным.

3. Пусть $f: \{1,2,3,5\} \rightarrow \{0,1,2\}$, $g: \{0,1,2\} \rightarrow \{3,7,9,13\}$, $h: \{3,7,9,13\} \rightarrow \{1,2,3,5\}$ – отображения, показанные на рисунке:

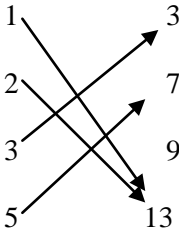


Нарисуйте композиции отображений:

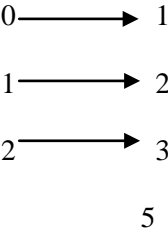
а) $g \circ f$; б) $h \circ g$; в) $h \circ f \circ g$;

Решение:

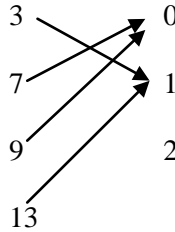
а) $f \square g$;



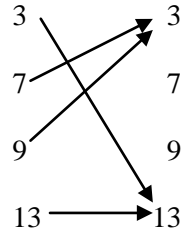
б) $g \square h$;



в) $h \square f$;



г) $h \square f \square g$;



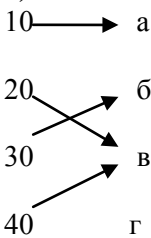
4. Установите биективное отображение между множеством $A = \{1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$ и натуральным рядом чисел.

Решение: поставим в соответствие элементу натурального ряда "n" $n \leftrightarrow 1 + 5(n-1)$, т.е. $a_n = 1 + 5(n-1) \in A$

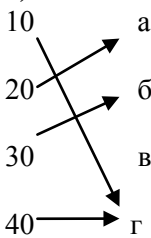
Задания для самостоятельного выполнения

1. Для отображения $f: \{10, 20, 30, 40\} \rightarrow \{a, б, в, г\}$, заданного рисунком, найдите $f(\{10, 40\})$, $f(\{10, 20, 30\})$, $f^{-1}(б)$, $f^{-1}(\{a, в\})$, $f^{-1}(\{б, в, г\})$.

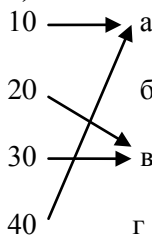
0)



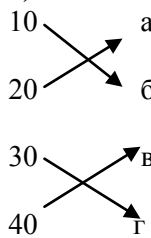
1)



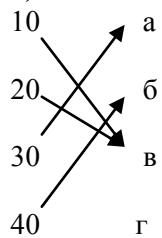
2)



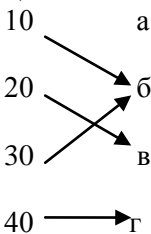
3)



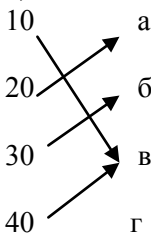
4)



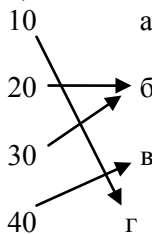
5)



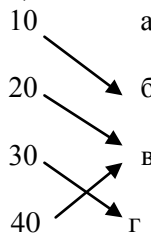
6)



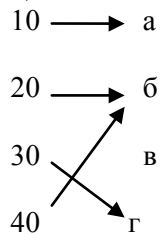
7)

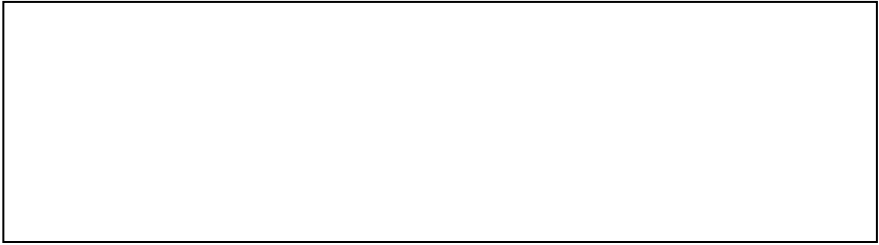


8)



9)





2. Найдите декартово произведение множеств $C = A \times B$:

- | | |
|---|---|
| 0) $A = \{1, 2, 3\}; B = \{7, 8, 9\};$ | 1) $A = \{2, 3, 4, 9\}; B = \{1, 7\};$ |
| 2) $A = \{1, 7\}; B = \{2, 4, 6, 8\}$ | 3) $A = \{3, 5, 10\}; B = \{2, 8, 9\};$ |
| 4) $A = \{2, 3, 4, 5\}; B = \{6, 10\}$ | 5) $A = \{5, 6\}; B = \{1, 7, 9, 2\};$ |
| 6) $A = \{10, 1, 2\}; B = \{1, 2, 8\};$ | 7) $A = \{10, 11, 12\}; B = \{2, 8, 9\};$ |
| 8) $A = \{6, 9\}; B = \{1, 2, 3, 5\};$ | 9) $A = \{2, 3, 5, 6\}; B = \{9, 12\};$ |



2. Вычислите мощность множеств:

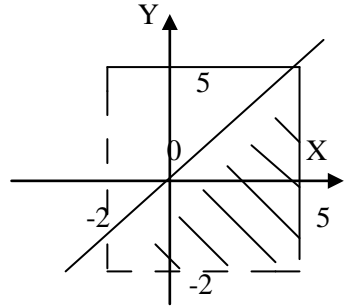
- | | |
|---|--|
| 0) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 41,$
$x\text{--квадрат числа}\}$
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x - 6) = 0\}$ | 1) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x\text{ -- делитель } 40\}$
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - x - 2) \cdot (x^2 - x - 20) = 0\}$ |
| 2) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x\text{ -- делитель } 81\}$
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 7x + 6) = 0\}$ | 3) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 51,$
$x\text{--квадрат числа}\}$
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3x - 4) \cdot (x^2 - 9x + 20) = 0\}$ |
| 4) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 65,$
$x\text{--квадрат числа}\}$
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 6x + 5) \cdot (x^2 - x - 12) = 0\}$ | 5) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x\text{ -- делитель } 54\}$
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x - 6) \cdot (x^2 - 5x + 4) = 0\}$ |
| 6) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x\text{ -- делитель } 36\}$
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 3x - 4) \cdot (x^2 + x - 12) = 0\}$ | 7) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 64,$
$x\text{--квадрат числа}\}$
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 4x - 5) \cdot (x^2 - 7x + 12) = 0\}$ |
| 8) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 78,$ | 9) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x\text{ -- делитель } 32\}$ |

2. Изобразите геометрически множество истинности двуместного предиката $P(x,y) = 1/4x \geq 1/4y$, если $x, y \in (-2, 5]$;

Построим график прямой:

$$1/4y = 1/4x; \quad y = x;$$

x	y
0	0
1	1



Проверим точку выше графика прямой, например, с координатами $(-1; 2)$.

Подставим координаты в неравенство:

$$1/4(-1) \geq 1/4(2) \text{ — это ложно, поэтому}$$

область истинности предиката расположена ниже прямой, включая ее точки (т.к. нестрогое неравенство).

Задания для самостоятельного выполнения

1. Постройте матрицу одноместного предиката $Q(x)$, если:

0) $Q(x) = "2x^2 \text{ кратно } 5", x \in (-8, 13);$	1) $Q(x) = "3x^2 \text{ кратно } 2", x \in [-5, 13];$
2) $Q(x) = "4x^2 \text{ кратно } 5", x \in (-10, 11);$	3) $Q(x) = "3x^3 \text{ кратно } 2", x \in [-9, 10];$
4) $Q(x) = "5x^2 \text{ кратно } 3", x \in (-5, 13];$	5) $Q(x) = "3x^3 \text{ кратно } 4", x \in (-7, 12);$
6) $Q(x) = "5x^3 \text{ кратно } 4", x \in [-6, 14];$	7) $Q(x) = "x^4 \text{ кратно } 2", x \in (-11, 1];$
8) $Q(x) = "x^3 \text{ кратно } 5", x \in (-9, 10);$	9) $Q(x) = "x^2 \text{ кратно } 3", x \in [-7, 12];$

x																			
$Q(x)$																			

2. Изобразите геометрически множество истинности одноместных предикатов $G(x)$ и $P(x)$, если:

$$0) G(x) = "8 \geq -2x > 4/3";$$

$$1) G(x) = "-9 < -3x \leq 3/2";$$

$$2) G(x) = "0 \geq 1/3x > 5/9";$$

$$3) G(x) = "1/4 < -3x \leq 9";$$

$$4) G(x) = "1/3 > -6x > -6";$$

$$5) G(x) = "8 \geq -2x > 4/3";$$

$$6) G(x) = "-1 < -3x \leq 3/2";$$

$$7) G(x) = "0 \geq 1/2x > 3/4";$$

$$8) G(x) = "1/5 < -3x \leq 9";$$

$$P(x) = "2 > 1/5x \geq -5";$$

$$P(x) = "12 > 3/4x > -3";$$

$$P(x) = "-14 \leq -7x \leq 1/4";$$

$$P(x) = "1 \geq 1/6x > -1/2";$$

$$P(x) = "5 \geq 1/2x \geq -1/4";$$

$$P(x) = "1/10 > 1/5x > -5";$$

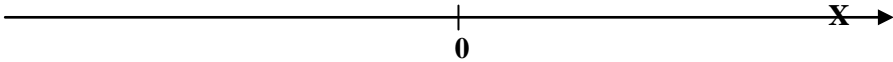
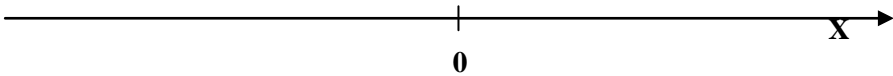
$$P(x) = "6 > 1/4x > -3";$$

$$P(x) = "-1 \leq -7x \leq 1/2";$$

$$P(x) = "1 \geq 1/6x > -1/2";$$

$$9) G(x) = "1/8 > -4x > -8";$$

$$P(x) = "2 \geq 1/2x \geq -1/4";$$



3. Изобразите геометрически множество истинности предиката $P(x)$, решив систему неравенств:

$$0) P(x) = \begin{cases} x + 5 \leq 3x + 7 \\ \frac{2x-2}{3} \leq \frac{x+1}{2} \end{cases}$$

$$1) P(x) = \begin{cases} 2x - 11 \leq 5x - 8 \\ \frac{x}{-2} \geq \frac{x}{-3} \end{cases}$$

$$2) P(x) = \begin{cases} x + 4 \leq 4x - 5 \\ -2x + 1 \geq 7x - 35 \end{cases}$$

$$3) P(x) = \begin{cases} 5 - 2x > 3 - x \\ 6 + 4x < 8 + x \end{cases}$$

$$4) P(x) = \begin{cases} 8(3 - x) + 2x > 0 \\ \frac{x}{4} - \frac{x}{2} < 1 \end{cases}$$

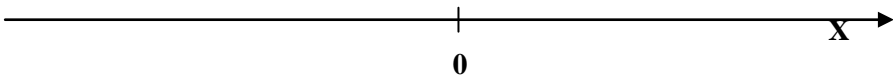
$$5) P(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{6} < \frac{2x}{3} \\ x - \frac{x-1}{4} < 0 \end{cases}$$

$$6) P(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x+4}{4} < 2 \\ \frac{3-x}{2} - x < 3x \end{cases}$$

$$7) P(x) = \begin{cases} 9(x + 3) < 5(x + 1) + 6(x + 2) \\ 2(x - 18) < 7x - 3(2x + 3) \end{cases}$$

$$8) P(x) = \begin{cases} 14 - 3x < 1 - x \\ 1 + 7x > 2 + 6x \end{cases}$$

$$9) P(x) = \begin{cases} 6(2 - x) - 3(4x + 1) > 0 \\ -2(6x - 1) > 2 \end{cases}$$



4. Постройте матрицу двуместного предиката $P(x,y)$ и проверьте решение геометрически:

$$0) P(x,y) = "3x > -1/2y", \text{ при } x, y \in (-4, 4);$$

$$1) P(x,y) = "1/3x > 9y", \text{ при } x, y \in (-2, 5];$$

$$2) P(x,y) = "-1/4x \leq 2y", \text{ при } x, y \in [-1, 5];$$

$$3) P(x,y) = "10x \leq 1/2y", \text{ при } x, y \in (-4, 3);$$

$$4) P(x,y) = "5x > 1/2y", \text{ при } x, y \in [-6, 1];$$

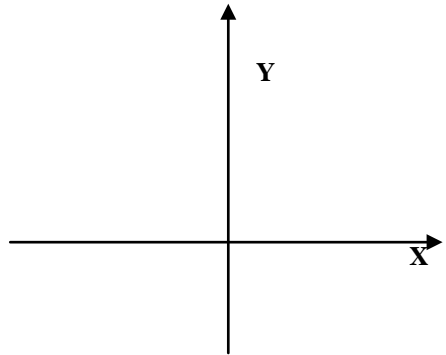
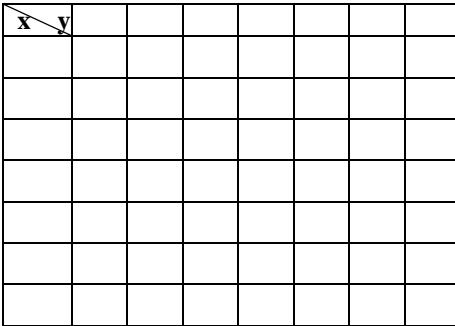
$$5) P(x,y) = "-4x \leq 3y", \text{ при } x, y \in [-5, 1];$$

$$6) P(x,y) = "-1/10x \leq 5y", \text{ при } x, y \in (-1, 7)$$

$$7) P(x,y) = "3x \leq 5/3y", \text{ при } x, y \in [-2, 4];$$

$$8) P(x,y) = "-3x < 2y", \text{ при } x, y \in [-5, 2];$$

$$9) P(x,y) = "1/6x > -12y", \text{ при } x, y \in [-1, 6].$$



Практическое занятие №5. Операции над предикатами и кванторами

Все логические операции логики высказываний справедливы и для предикатов (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция). *Квантор* — общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката. В математической логике приписывание квантора к формуле называется *связыванием*, а переменную, к которой он относится, называют *связанной* иначе *свободной*. Например, в предикате $\forall x A(x, y) \vee \forall z B(c, z)$ переменные x и z - связанные, а переменные y и c - свободные.

Чаще всего используют два вида кванторов:

Название	Прочтение	Обозначение
Квантор общности	«все», «всякий», «каждый», «любой»	\forall
Квантор существования	«существует», «найдется», «хотя бы один»	\exists

Пусть задан одноместный предикат $P(x)$ на множестве $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, тогда: $\forall x P(x) = P(a_1) \& P(a_2) \& P(a_3) \& P(a_4)$;
 $\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee P(a_4)$.

Говорят, что у квантора всеобщности конъюнктивная природа, а у квантора существования — дизъюнктивная. Квантор уменьшает число свободных переменных в логическом выражении и превращает

трёхместный предикат в двухместный, двухместный — в одноместный, одноместный — в высказывание.

Примеры выполнения заданий

1. Пусть предикат $Q(x,y)$ определен на конечных множествах:

$X=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $Y=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ и имеет таблицу истинности:

X	Y					
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_1	И	И	Л	Л	И	Л
a_2	Л	Л	Л	И	И	Л
a_3	И	И	Л	Л	И	И
a_4	Л	И	Л	Л	И	И
a_5	И	И	И	И	И	И

С помощью кванторов общности и существования постройте высказывания и определите их истинность.

Решение. Результат применения кванторов общности и существования по $x \in X$:

	Y					
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\forall x Q(x,y)$	Л	Л	Л	Л	И	Л
$\exists x Q(x,y)$	И	И	И	И	И	И

Результат применения квантора общности по $y \in Y$:

X	$\forall y Q(x,y)$
a_1	Л
a_2	Л
a_3	Л
a_4	Л
a_5	И

Результат применения квантора существования по $y \in Y$:

X	$\exists y Q(x,y)$
a_1	И
a_2	И
a_3	И
a_4	И
a_5	И

Применив кванторы общности и существования повторно, получим восемь высказываний (0-арных предикатов), представленных в таблице:

Высказывание	Значение истинности
$\forall y \forall x Q(x, y)$	Л

$\exists y \forall x Q(x, y)$	И
$\forall y \exists x Q(x, y)$	И
$\exists x \forall y Q(x, y)$	И
$\forall x \exists y Q(x, y)$	И
$\exists x \exists y Q(x, y)$	И

Задания для самостоятельного выполнения

1. Пусть предикат $P(x, y)$ определен на множествах: $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $Y = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\}$ и имеет таблицу истинности. С помощью кванторов постройте высказывания и определите их истинность:

0)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	Л	И	Л	И	Л	И	И	Л
a_2	Л	И	И	И	Л	И	И	Л
a_3	И	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
a_4	И	И	Л	И	Л	Л	Л	Л

1)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л
a_2	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
a_3	И	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
a_4	Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л

2)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	И	Л	И	Л	И	Л	И	Л
a_2	Л	И	И	Л	Л	Л	Л	И
a_3	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И
a_4	Л	И	Л	И	И	Л	Л	И

3)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	И	И	Л	И	И	Л	Л	И
a_2	Л	Л	И	Л	И	И	И	И
a_3	И	Л	И	Л	И	И	Л	И
a_4	И	И	Л	И	Л	Л	Л	И

4)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	Л	И	Л	И	Л	И	И	Л
a_2	Л	И	И	И	Л	И	И	Л
a_3	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
a_4	И	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л

5)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	И	И	Л	И	И	Л	Л	Л
a_2	Л	И	И	И	И	Л	Л	И
a_3	И	И	Л	Л	И	И	Л	И
a_4	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л

6)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	Л	И	Л	И	И	И	И	Л
a_2	Л	И	И	И	И	И	И	Л
a_3	Л	Л	И	И	И	Л	Л	Л
a_4	И	Л	Л	И	И	И	Л	Л

7)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л
a_2	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л
a_3	И	И	Л	И	И	И	И	Л
a_4	И	И	Л	Л	И	Л	Л	Л

8)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	И	И	Л	И	Л	И	Л	И
a_2	И	Л	Л	И	И	Л	И	Л
a_3	Л	И	Л	И	И	Л	Л	И
a_4	Л	Л	И	И	И	Л	Л	Л

9)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
a_2	И	И	И	И	Л	И	И	Л

a_3	Л	И	Л	И	И	И	И	И
a_4	Л	Л	Л	И	И	И	Л	И

Решение:

Y	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
$\forall x P(x, y)$								
$\exists x P(x, y)$								
X	$\forall y P(x, y)$			X			$\exists y P(x, y)$	
a_1				a_1				
a_2				a_2				
a_3				a_3				
a_4				a_4				

2. Предикат $R(x, y)$ определен на множествах: $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $Y = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\}$ и имеет таблицу истинности. С помощью кванторов постройте высказывания и определите их истинность:

0)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И
a_2	И	И	Л	И	И	И	Л	Л
a_3	И	И	Л	И	И	Л	Л	Л
a_4	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
a_5	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

1)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	Л	И	Л	И	Л	И	И	Л
a_2	Л	Л	Л	И	Л	И	Л	Л
a_3	И	И	И	И	Л	И	Л	Л
a_4	Л	Л	И	И	И	И	И	И
a_5	И	Л	Л	И	Л	И	Л	Л

2)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	И	Л	И	И	И	И	И	И
a_2	И	Л	Л	И	Л	Л	Л	И
a_3	И	Л	Л	И	Л	Л	Л	И
a_4	И	Л	Л	И	И	Л	Л	И
a_5	И	Л	И	И	И	И	Л	Л

3)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	И	И	Л	И	И	Л	Л	И
a_2	Л	Л	И	Л	И	И	И	И
a_3	И	Л	И	Л	И	И	Л	И
a_4	И	И	Л	И	Л	Л	Л	И
a_5	И	Л	И	Л	Л	Л	И	Л

4)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	И	И	Л	Л	Л	Л	И	Л
a_2	И	И	И	И	Л	И	И	Л
a_3	И	И	И	И	Л	Л	Л	Л
a_4	И	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
a_5	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И	И

5)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	Л	Л	Л	И	И	Л	Л	Л
a_2	Л	И	И	Л	И	Л	Л	И
a_3	Л	И	Л	Л	И	И	Л	Л
a_4	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л
a_5	Л	И	Л	И	Л	Л	И	Л

6)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	Л	И	Л	И	И	И	И	И
a_2	Л	И	И	И	И	И	И	Л
a_3	Л	И	И	И	И	Л	Л	Л
a_4	И	Л	Л	И	И	И	И	И
a_5	И	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л

7)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	И	Л	Л	И	И	И	И	Л
a_2	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л
a_3	И	И	Л	И	И	И	И	Л
a_4	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л
a_5	И	И	И	Л	Л	Л	Л	Л

8)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	И	И	Л	И	И	И	И	И
a_2	И	Л	И	И	И	Л	И	Л
a_3	Л	И	Л	И	И	Л	Л	И
a_4	Л	И	И	И	И	И	Л	Л
a_5	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

9)

X	Y							
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
a_2	И	И	И	И	И	И	И	И
a_3	Л	И	Л	И	И	И	И	И
a_4	Л	Л	Л	И	И	И	Л	И
a_5	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л

Решение:

X	$\forall y R(x, y)$
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	

X	$\exists y R(x, y)$
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	

Y	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
$\forall x R(x, y)$								
$\exists x R(x, y)$								

3. Предикат $A(x, y)$ определен на множествах: $X=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $Y=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$ и задан таблично. С помощью кванторов постройте высказывания и определите их истинность:

0)

X	Y						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	Л	И	Л	И	Л	И	Л
a_2	Л	И	И	И	Л	И	И
a_3	И	И	Л	И	Л	И	Л
a_4	И	И	Л	И	Л	И	Л
a_5	Л	И	Л	Л	И	И	Л

a_6	И	И	Л	Л	Л	Л	И
-------	---	---	---	---	---	---	---

1)

X	Y						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	Л	И	Л	И	Л	Л	И
a_2	Л	И	И	И	Л	Л	Л
a_3	И	И	Л	И	Л	И	И
a_4	И	И	Л	И	Л	И	Л
a_5	Л	И	Л	И	И	Л	И
a_6	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

2)

X	Y						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	Л	И	Л	И	Л	Л	И
a_2	Л	И	И	И	Л	Л	Л
a_3	Л	Л	Л	И	Л	Л	И
a_4	Л	Л	И	И	И	И	И
a_5	Л	И	И	Л	И	И	Л
a_6	Л	И	Л	Л	Л	Л	И

3)

X	Y						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	Л	И	Л	И	И	Л	И
a_2	И	И	Л	Л	Л	Л	Л
a_3	И	И	Л	И	Л	Л	И
a_4	Л	И	Л	Л	И	И	И
a_5	И	И	Л	И	И	И	Л
a_6	Л	И	И	И	Л	И	И

4)

X	Y						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	И	И	Л	И	Л	И	Л
a_2	Л	И	Л	И	Л	И	Л
a_3	Л	И	Л	И	Л	Л	Л
a_4	Л	Л	Л	Л	Л	И	И
a_5	И	И	Л	И	И	И	Л
a_6	И	Л	И	Л	И	И	И

5)

X	Y						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	И	Л	Л	И	Л	И	Л
a_2	Л	Л	Л	И	И	Л	Л
a_3	Л	И	Л	И	И	Л	Л
a_4	Л	Л	Л	Л	И	Л	И
a_5	Л	И	Л	И	И	И	И
a_6	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И

6)

X	Y						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	Л	И	Л	И	Л	Л	И
a_2	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
a_3	Л	И	Л	И	И	Л	Л
a_4	Л	И	И	Л	Л	Л	И
a_5	Л	Л	Л	И	И	Л	И
a_6	И	И	Л	Л	И	И	И

7)

X	Y						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	И	Л	Л	И	Л	И	Л
a_2	Л	Л	Л	И	И	Л	Л
a_3	Л	И	Л	И	И	Л	Л
a_4	Л	Л	Л	Л	И	Л	И
a_5	Л	И	Л	И	И	И	И
a_6	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И

8)

X	Y						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	И	Л	Л	Л	И	И	И
a_2	И	Л	Л	Л	Л	И	И
a_3	И	Л	И	И	Л	И	И
a_4	И	Л	И	И	Л	И	И
a_5	Л	И	И	И	И	И	И
a_6	Л	И	Л	Л	Л	Л	И

9)

X	Y						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	Л	Л	Л	И	Л	И	И
a_2	Л	И	Л	Л	И	Л	И
a_3	Л	И	Л	Л	Л	И	Л
a_4	И	Л	Л	Л	И	Л	Л
a_5	И	И	Л	Л	И	И	И
a_6	Л	И	Л	Л	Л	Л	И

Решение:

Y	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
$\forall x A(x, y)$							
$\exists x A(x, y)$							

X	$\forall y A(x, y)$
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	
a_6	

X	$\exists y A(x, y)$
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	
a_6	

Высказывание	Значение истинности
$\forall x \forall y A(x, y)$	
$\forall x \exists y A(x, y)$	
$\exists x \forall y A(x, y)$	
$\exists x \exists y A(x, y)$	
$\forall y \exists x A(x, y)$	
$\exists y \forall x A(x, y)$	

Виды форм логики предикатов

Две формулы логики предикатов А и В называются *равносильными*, если они равносильны на всякой области.

Пусть $P(x)$, $Q(x)$ и $U(x, y)$ – переменные предикаты. Тогда имеют место равносильности:

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \equiv \exists x \neg P(x) \& \forall y \neg Q(y)$$

$\neg(\forall x P(x) \& \exists y Q(y)) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \forall y \neg Q(y)$
$\neg \neg \forall x P(x) \equiv \forall x P(x)$ $\neg \neg \exists x P(x) \equiv \exists x P(x)$
$\forall x \forall y U(x, y) \equiv \forall y \forall x U(x, y)$ $\exists x \exists y U(x, y) \equiv \exists y \exists x U(x, y)$ $\forall x \exists y U(x, y) \neq \exists y \forall x U(x, y)$ $\exists x \forall y U(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x U(x, y)$
$\forall x \forall x Q(x) \equiv \forall x Q(x)$ $\exists x \exists x Q(x) \equiv \exists x Q(x)$ $\forall x (P(x) \& P(x)) \equiv \forall x P(x)$ $\exists x (P(x) \vee P(x)) \equiv \exists x P(x)$
$\forall x P(x) \& \forall y U(y) \equiv \forall x \forall y (P(x) \& U(y))$ $\forall x P(x) \& \forall x U(x) \equiv \forall x (P(x) \& U(x))$
$\exists x P(x) \vee \exists y U(y) \equiv \exists x \exists y (P(x) \vee U(y))$ $\exists x P(x) \vee \exists x U(x) \equiv \exists x (P(x) \vee U(x))$
$\exists x P(x) \& \exists x U(x) \neq \exists x (P(x) \& U(x))$ $\exists x P(x) \& \exists x U(x) \equiv \exists x \exists a (P(x) \& U(a))$
$\forall x P(x) \vee \forall x U(x) \neq \forall x (P(x) \vee U(x))$ $\forall x P(x) \vee \forall x U(x) \equiv \forall x \forall a (P(x) \vee U(a))$
$\forall x P(x) \& \exists x U(x) \equiv \forall x \exists a (P(x) \& U(a))$ $\forall x P(x) \vee \exists x U(x) \equiv \forall x \exists a (P(x) \vee U(a))$

В логике предикатов различают два вида форм: приведенную и предваренную.

Говорят, что формула логики предикатов имеет *приведенную форму*, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

Среди нормальных форм формул логики предикатов выделяют так называемую *предваренную* (префиксную, пренексную) *нормальную*

форму (ПНФ). В ней кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются перед всеми операциями алгебры логики.

Алгоритм получения ПНФ:

1. выразите операции импликации и эквиваленции через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание;
2. внесите символы отрицания так, чтобы они относились непосредственно к символам предикатов (и, таким образом, мы приведем исходную формулу к приведенной форме);
3. для формул, содержащих подформулы вида: $\forall x P(x) \vee \forall x U(x)$, $\exists x P(x) \& \exists x U(x)$, $\forall x P(x) \& \exists x U(x)$, $\forall x P(x) \vee \exists x U(x)$ введите новые связанные переменные;
4. используя свойства и законы логики предикатов, вынесите все кванторы перед высказыванием и получите формулу в виде ПНФ.

Примеры выполнения заданий

1. Приведите формулу логики предикатов к приведенной форме:

$$(\Box xP(x) \rightarrow \Box yQ(y)) \rightarrow R(z) \equiv \overline{\Box xP(x)} \overline{\Box yQ(y)} \Box R(z) \equiv \\ \equiv \overline{\Box xP(x)} \overline{\Box yQ(y)} \Box R(z) \equiv \Box xP(x) \Box \Box yQ(y) \Box R(z)$$

2. Приведите формулу логики предикатов к приведенной форме, где x, y, z – вещественные переменные, применив отрицание к формуле:

$$\forall y \exists x ((y \neq x) \vee \neg \forall y (x < y) \& \forall z (y - x \leq z)). \\ \neg (\forall y \exists x ((y \neq x) \vee \neg \forall y (x < y) \& \forall z (y - x \leq z))) \equiv \\ \equiv \exists y \forall x ((y = x) \& \forall y (x < y) \vee \exists z (y - x \geq z))$$

3. Приведите формулу логики предикатов к предваренной нормальной форме $\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \forall x \exists y Q(x, y)$.

$$\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \forall x \exists y Q(x, y) \equiv \exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y \neg Q(x, y) \equiv \\ \equiv \exists x (\forall y P(x, y) \vee \forall y \neg Q(x, y)) \equiv \exists x (\forall y P(x, y) \vee \forall a \neg Q(x, a)) \equiv \\ \equiv \exists x \forall y (P(x, y) \vee \forall a \neg Q(x, a)).$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Приведите формулу логики предикатов к приведенной нормальной форме:

0)

$\neg \forall y \exists x T(y, x) \vee \exists y \forall x Q(y, x) ;$
 $\exists x (\neg \forall y U(y, x) \& \exists z \exists y L(y, z, x)) ;$
 $\forall x \neg (\forall y A(x, y) \rightarrow \exists y H(z, x)) ;$
 $\neg \forall y \forall z U(y, z) \sim \forall x \exists y Q(y, x) ;$

1)

$\forall y \neg (\exists x G(y, x) \rightarrow \forall z \exists x N(y, x, z)) ;$
 $\exists x \forall y (\neg (E(y, x) \& \exists z Q(y, z))) ;$
 $\exists t (\neg (\forall y K(y, t) \sim \exists y \exists z Q(y, t, z))) ;$
 $\forall z \forall x A(x, z) \vee \forall y \forall z Q(y, x) ;$

2)

$\exists y \forall x M(y, x) \& \exists y \forall z Q(y, z) ;$
 $\exists t \neg (\forall y K(y, t) \rightarrow \exists x \exists y F(y, x, t)) ;$
 $\forall z \forall y \neg (\exists x G(z, y) \sim \forall x \forall s N(x, s)) ;$
 $\neg \forall s \exists x U(s, x) \vee \exists y \forall x Q(y, x) ;$

3)

$\forall y (\forall m U(y, m) \& \forall x Q(y, x)) ;$
 $\forall x \neg (\exists y A(x, y) \rightarrow (\neg \exists z \forall y D(y, z))) ;$
 $\exists x \neg (\exists y \forall z P(z, x, y) \vee \exists z \forall y K(y, x, z)) ;$
 $\exists x \forall y T(y, x) \sim \neg \exists y \forall x P(y, x) ;$

4)

$\forall y \exists z T(y, z) \sim \forall x \forall y Q(y, x)) ;$
 $\exists t \neg (\forall y U(y, t) \vee \exists y \forall x R(y, x)) ;$
 $\forall x (\neg (\exists y G(y, x) \rightarrow \neg \forall y P(y, x)) ;$
 $\forall t (\neg \exists x \forall y N(y, x) \& \exists y L(y, t)) ;$

5)

$\forall y (\exists x \exists z F(z, y, x) \rightarrow \neg \forall x Q(y, x)) ;$
 $\exists x \forall y (\neg \forall t U(t, y, x)) \vee \neg \forall x \exists y R(y, x) ;$
 $\forall z \neg (\forall y A(z, y) \& \neg \exists x \exists y H(y, x)) ;$
 $\exists a \exists y U(y, a) \sim \exists t \exists a Q(a, t) ;$

6)

$\forall y \neg (\exists n A(n, y) \rightarrow \exists y \forall n H(y, n)) ;$
 $\neg \forall y \forall m U(y, m) \vee \neg \forall y \forall x D(y, x) ;$
 $\forall x (\exists n C(n, x) \sim \forall t \exists y Q(y, x, t)) ;$
 $\forall n \forall m \neg \forall y G(n, y, m) \& \neg \forall x \exists y B(y, x)) ;$

7)

$\forall z \neg (\forall y C(z, y) \rightarrow \exists y \exists t \forall x Q(t, y, x)) ;$

$\exists z \forall y U(z, y) \& \exists x \exists z \forall m F(m, x, z) ;$
 $\forall x \neg(\exists y \exists t A(x, y, t) \sim \forall y \exists z Q(y, z)) ;$
 $\forall y \forall m U(y, m) \vee \neg \forall x \exists y \exists m K(m, x, y) ;$

8)

$\forall z \neg(\exists x A(x, z) \rightarrow \exists y \neg \exists z Q(y, z)) ;$
 $\forall y (\forall m U(y, m) \& \neg \exists m \forall x F(y, x, m)) ;$
 $\forall x \neg(\forall y \exists z K(x, z, y) \sim \exists y Q(y, x)) ;$
 $\forall x \neg(\forall y \forall t U(t, y, x) \vee \neg \exists y \exists t R(y, t)) ;$

9)

$\forall t \neg(\exists y \exists z H(t, y, z) \rightarrow \exists x \forall y G(y, x)) ;$
 $\exists x \neg \forall y U(y, x) \& \exists x \exists y \forall z Q(y, z, x) ;$
 $\forall y \forall x \exists z A(y, x, z) \vee \forall x \exists z B(z, x) ;$
 $\exists x \neg(\forall y K(y, x) \sim \exists y \exists z L(y, x, z)) ;$

2. Приведите формулы логики предикатов к приведенной нормальной форме, где x, y, z – вещественные переменные, применив отрицание к формуле:

0)

$\forall y (\exists x (y > x) \vee \forall t (y = t)) ;$
 $\exists x (\neg \forall y (y < x) \supset \exists z \forall t (z + x + y \geq t)) ;$
 $\forall x \exists y \exists z ((x + y > z) \& (x + z > y) \& (y + z > x)) ;$
 $\forall x \forall y (\neg \forall t (y \neq t) \supset (y > x)) ;$

1)

$\forall y (\exists x (y \leq x) \supset \forall z ((y = x) \vee (y = z))) ;$
 $\exists x \forall y (\neg(y - x > 0) \& \exists z (y - z > 0)) ;$
 $\exists x \forall z (\neg(\exists y (z \neq y) \vee (z \neq x))) \supset (x + z < 0)) ;$
 $\forall t \exists x \forall y ((y < x) \& (t > x)) ;$

2)

$\forall y \exists x ((y \neq x) \& \forall z (y + x > z)) ;$
 $\exists t (\neg (\forall y (y = t)) \supset \exists x (t > x) \vee (y > t)) ;$
 $\forall x \exists z \forall y ((y - x > 0) \supset \forall t (y - x > t)) ;$
 $\exists x \forall y (\neg (y > x) \& \exists z (y < z)) ;$

3)

$\forall t (\neg(\exists x (x = t)) \supset \exists y (y + t > x)) ;$
 $\forall y \forall z ((y > 0) \vee (z > y) \& \forall x (y > x)) ;$
 $\exists x (\neg (\forall y (y = x)) \supset \exists z (y > z)) ;$
 $\forall z (\exists y (z > 0) \vee \forall t (y < t)) ;$

4)

$$\begin{aligned} & \forall y \exists x ((y - x > 0) \vee \forall z (y - z > x)) ; \\ & \exists x \forall y ((y = x) \& \exists z ((z < x) \vee (z < y))) ; \\ & \forall t \exists x ((t \neq x) \& \forall y (y \neq x) \supset (t \neq x)) ; \\ & \forall z (\neg (\forall y ((z > y) \& (y > 0))) \supset \exists x (y > x)); \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} & \forall y \exists x \forall z ((y + x + z \neq 0) \supset \forall t ((t > y) \vee (t > x) \vee (t > z))) ; \\ & \forall x (\forall z ((z^2 > x) \& (x^2 > z)) \vee (\neg (\exists y (y^2 > x)))) ; \\ & \exists y \forall z (\neg (z = y) \supset (y \neq z)) ; \\ & \forall y (\exists t (y > t) \& \exists x (y > x)); \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned} & \exists y (\exists z (z = y) \supset (\neg (\exists x (z = x)))) ; \\ & \forall x \forall y \forall z ((x + y > z) \& (y + z > x) \& (z + x > y)) ; \\ & \forall t (\neg (\exists y ((t < 0) \vee (y < 0))) \supset (y + t > 0)) ; \\ & \exists z \forall y \forall x ((z - x > 0) \vee (y - x > 0)) ; \end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned} & \forall x (\neg (\forall y (x > y)) \supset \exists z (x + z > y)) ; \\ & \forall y (\exists t (y \neq t) \& \exists x (y \neq x)) ; \\ & \exists z \forall y ((z < 0) \vee (y < 0) \vee \exists x (x > y + z)) ; \\ & \exists x \exists z \exists y (\neg ((x > y) \& (y > z)) \supset (x < z)) ; \end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned} & \forall x (\neg (\exists y (x + y > 0)) \supset \exists t (t - y + x > 0)) ; \\ & \forall y \forall z ((y \neq z) \& \forall x (y \neq x)) ; \\ & \forall x \forall y (\neg (\forall z (y \leq x)) \& (y \geq z)) ; \\ & \exists z \forall x \exists t ((x + z > t) \supset \exists y (\neg (x + t + z < y))) ; \end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned} & \forall z (\exists y (z > y) \supset \exists x (x > z)) ; \\ & \forall x \forall z (\neg (\forall y (y - x > 0)) \& \exists t (y + z + t < 0)) ; \\ & \exists t \forall y ((y \neq t) \vee \forall z (y - z \neq t)) ; \\ & \exists x \exists t (\forall y (y > x) \supset \exists z (\neg (y + x + t > z))) ; \end{aligned}$$

Практическое занятие № 6. Применение логики предикатов

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений и определений. Он дает возможность выражать логические

связи между понятиями, записывать определения, теоремы, доказательства.

Примеры выполнения заданий

Запишите определение на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы, и постройте его отрицание:

Функция f непрерывна в точке x_0 , если и только если для всякого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что для всякого x из области определения D функции f , если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Решение. Запишем это определение на языке логики предикатов двумя разными способами.

1 способ:

$$\square \varepsilon > 0 \square \delta > 0 \square x \square D (P(\varepsilon, \delta, x)), \text{ где}$$

$$P(\varepsilon, \delta, x) = (0 < |x - x_0| < \delta \supset |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

2 способ, используя ограниченные кванторы:

$$\square_{>0} \varepsilon \square_{>0} \delta \square_{\square D} x ((|x - x_0| < \delta \square |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))$$

$$\neg (\forall_{>0} \varepsilon \exists_{>0} \delta \forall_{\in M_f} x ((|x - x_0| < \delta \supset (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))) \equiv$$

$$\equiv \exists_{>0} \varepsilon \forall_{>0} \delta \exists_{\in M_f} x (\neg ((|x - x_0| < \delta \supset (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))) \equiv$$

определения:

Построим отрицание этого

$$\equiv \exists_{>0} \varepsilon \forall_{>0} \delta \exists_{\in M_f} x ((|x - x_0| < \delta \& \neg (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)) \equiv$$

$$\equiv \exists_{>0} \varepsilon \forall_{>0} \delta \exists_{\in M_f} x ((|x - x_0| < \delta \& (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)).$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Запишите аксиомы положительных величин на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы:

0) Коммутативность сложения

Для любых двух величин $a, b \in A$ справедливо $a + b = b + a$.

1) Ассоциативность сложения

Для любых двух величин $a, b, c \in A$ справедливо $a + (b + c) = (a + b) + c$.

2) Монотонность сложения

Для любых двух величин $a, b \in A$ справедливо $a + b > a$.

3) Транзитивность отношения

Для любых трех величин $a, b, c \in A$. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

4) Возможность суммирования

Для любых двух величин $a, b, c \in A$ существует однозначно определенная величина $c = a + b$.

5) Возможность вычитания

Для любых двух величин $a, b, c \in A$ если $a > b$, то существует одна и только одна величина $c \in A$, для которой $b + c = a$.

6) Возможность деления

Какова бы ни была величина $a \in A$ и натуральное число n , найдется такая величина $b \in A$, что $n * b = a$.

7) Возможность сравнения

Для любых двух величин $a, b \in A$ имеет место одно из трех отношений: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

8) Аксиома Архимеда или Евдокса

Каковы бы ни были величины $a, b \in A$, существует такое n , что $n * b > a$

9) Аксиома соизмеримости отрезков

Пусть последовательность величин $a_i \in A$, $i = 1 \dots n$ обладает свойством $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$, а последовательность $b_i \in A$, $i = 1 \dots n$ свойством $b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots$, при этом $a_i < b_i$ для любых $i, j \in N$.

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ разность $|a_n - b_n| < \varepsilon$. Тогда существует единственный элемент $c \in A$, удовлетворяющий условиям $a_i < c$, $c < b_j$ для любых $i, j \in N$.

2. Запишите некоторые аксиомы действительных чисел на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы:

0) $x + x' = 0$ (для любого $x \in R$ существует $x' \in R$, противоположный x)

1) $x \neq y \Rightarrow x > y$ или $y > x$ (для любых $x, y \in R$)

2) $(x * y) * z = x * (y * z)$ (для любых $x, y, z \in R$)

3) $\neg x > x$ (для любого $x \in R$)

4) $(x + y) * z = x * z + y * z$ (для любых $x, y, z \in R$)

5) $(x > y, y > z) \Rightarrow (x > z)$ (для любых $x, y, z \in R$)

6) $x \neq 0 \Rightarrow x * x' = 1$ (для любого $x \in R$. и $x \neq 0$ существует $x' \in R$, x' – обратный элемент для x)

7) $(x > y) \Rightarrow (x + z > y + z)$ (для любых $x, y, z \in R$)

8) $x * 1 = x, 1 \in R$ (для любого $x \in R$)

9) $(x > y, z > 0) \Rightarrow (x * z > y * z)$ (для любых $x, y, z \in R$)

3. Подберите элементарные предикаты и запишите следующие высказывания:

- 0) а) каждое положительное действительное число является квадратом другого;
 б) натуральное число, которое делится на 6, разделится и на 2;
- 1) а) для каждого натурального числа существует одно и только одно число, непосредственно следующее за ним;
 б) каждое действительное число является кубом другого;
- 2) а) натуральное число, которое делится на 6, разделится и на 3;
 б) произведение двух натуральных чисел, одно из которых четное, другое нечетное, есть число четное;
- 3) а) от перемены мест сомножителей произведение не меняется;
 б) натуральное число, которое делится на 2 и 3, разделится на 6;
- 4) а) натуральное число, которое делится на 9, разделится на 3;
 б) от перемены мест слагаемых сумма не меняется;
- 5) а) частное от деления двух натуральных четных чисел, если оно существует, есть число четное или нечетное;
 б) если произведение двух натуральных чисел делится на 5, то хотя бы один из сомножителей делится на 5;
- 6) а) для чисел отличных от нуля существует наибольший общий делитель;
 б) если произведение двух натуральных чисел делится на 12, то среди них есть четное число, делящееся на 3;
- 7) а) если произведение двух натуральных чисел делится на 18, то хотя бы один сомножитель делится на 6 или хотя бы один из сомножителей нечетный;
 б) сумма двух натуральных чисел, имеющих различную четность, нечетна;
- 8) а) для чисел отличных от нуля существует наименьшее общее кратное;
 б) если ни одно из двух натуральных чисел не делится на 11, то их произведение не делится на 11;
- 9) а) если произведение двух натуральных чисел делится на 12, то хотя бы один из сомножителей делится на 3 или хотя бы один из сомножителей четный;
 б) сумма двух натуральных четных чисел, есть число четное.

4. Запишите определения на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы, и постройте их отрицания:

0) Функция $f(x)$ называется **возрастающей** в промежутке X из области определения, если для любых $x_1, x_2 \in X$, из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

1) Прямая называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если при удалении точки M в бесконечность по графику, расстояние от M до этой прямой стремится к нулю

2) Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ вблизи точки a выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$ (это значит, что существует проколота окрестность точки a , в которой выполняется указанное неравенство)

3) Функция f **непрерывна** в точке a , если она определена в этой точке и разность $f(x) - f(a)$ бесконечно мала при $x \rightarrow a$, т.е. функция f непрерывна в точке a в том и только в том случае, когда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

4) Функция $f(x)$ **бесконечно большая** при $x \rightarrow a$, если функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно мала при $x \rightarrow a$.

5) Функция называется **периодической**, если существует такое число T , что для любого аргумента x число $x \pm T$ принадлежит области определения и $f(x \pm T) = f(x)$.

6) Число A называется **пределом бесконечной числовой последовательности** $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots, a_n, \dots$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное n_ε , что для всякого номера n , если $n > n_\varepsilon$, то $|a_n - A| < \varepsilon$.

7) Функция $f(x)$ называется **убывающей** в промежутке X из области определения, если для любых $x_1, x_2 \in X$, из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

8) Функция называется **четной**, если для любого аргумента x из области определения число $-x$ также входит в область определения и $f(-x) = f(x)$.

9) Функция $f(x)$ называется **убывающей** в промежутке X из области определения, если для любых $x_1, x_2 \in X$, из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Практическое занятие №7 Комбинаторика. Правила суммы

и произведения.

Правило суммы. Если объект А можно выбрать n способами, а объект В k способами, то объект "А или В" можно выбрать $n+k$ способами.

Правило произведения. Если объект А можно выбрать n способами, а объект В независимо от него k способами, то пару объектов "А и В" можно выбрать $n \cdot k$ способами.

Задания для самостоятельного выполнения

- 0) В ящике находятся 20 шаров: 5 белых, 6 черных, 7 синих и 2 красных. Сколькими способами можно взять из ящика один цветной шар?
- 1) В розыгрыше первенства по футболу принимают участие 18 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали, если любая команда может получить только одну медаль?
- 2) При формировании экипажа космического корабля имеется 10 претендентов на пост командира экипажа, 20 - на пост бортинженера и 25 - на пост космонавта-исследователя. Ни один кандидат не претендует одновременно на два поста. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур или командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?
- 3) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?
- 4) Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну — на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?
- 5) Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?
- 6) В ящике лежат 4 черных и 3 белых шара. Наудачу вынимаются последовательно два шара. Какова вероятность того, что оба эти шара окажутся белыми? (Шар после выбора в ящик не возвращается.)
- 7) В столовой предлагают два различных первых блюда a_1 и a_2 , три различных вторых блюда b_1 , b_2 , b_3 и два вида десерта c_1 и c_2 . Сколько различных обедов из трех блюд может предложить столовая?
- 8) У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен?
- 9) На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? То же самое при условии, что спуск и подъем происходят по разным путям.

2.2. Размещения без повторений

Размещениями из n элементов по m ($m \leq n$) называются упорядоченные

m -элементные выборки из данных n элементов A_n^m . $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Задания для самостоятельного выполнения

- 0) Составьте все слова из трех букв А, В, С по две буквы.
- 1) В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из класса команду из 4 учащихся для участия в олимпиаде по истории?
- 2) Сколькими способами можно составить двуцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? Та же задача, если одна из полос должна быть красной?
- 3) Из состава конференции, на которой присутствует 45 человека, надо избрать делегацию из 6 человек. Сколькими способами это можно сделать?
- 4) В турнире принимают участие 8 команд. Сколько различных предположений относительно распределения трех первых мест можно сделать?
- 5) Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различны и нечетны?
- 6) Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя 6 различных цветов?
- 7) Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?
- 8) На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?
- 9) У Димы есть 5 шариков: красный, зеленый, желтый, синий и золотой. Сколькими способами он сможет украсить ими 5 елок, если на каждую требуется надеть ровно один шарик?

2.3. Размещения с повторениями

Размещениями с повторениями из n по m называются упорядоченные m -элементные выборки, в которых элементы могут повторяться.

$$\bar{A}_n^m = n^m$$

Задания для самостоятельного выполнения

- 0) Сколько четырехбуквенных «слов» можно составить из букв "М" и "А"?
- 1) Сколькими способами можно разместить восемь пассажиров в три вагона?

- 2) Каждый телефонный номер состоит из семи цифр. Сколько всего телефонных номеров, не содержащих других цифр, кроме 2, 3, 5 и 7?
- 3) Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?
- 4) Сколько различных трехбуквенных слов можно составить из 32 букв алфавита (со смыслом и без)?
- 5) В селении проживает 2000 жителей. Доказать, что, по крайней мере, двое из них имеют одинаковые инициалы.
- 6) Сколькими способами можно покрасить пять елок в серебристый, зеленый и синий цвета, если количество краски неограниченно, а каждую елку можно покрасить только в один цвет?
- 7) Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?
- 8) Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее «Спортпрогноз»? Указание: в этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча - победа одной из команд либо ничья; счет роли не играет.
- 9) Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Указание: сосчитайте отдельно количества одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.

2.4. Перестановки без повторений

Перестановками из n элементов называются размещения из n элементов

$$\text{по } n. \quad P_n = n!$$

Пусть (a_1, a_2, \dots, a_n) — перестановка элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Пара (a_i, a_j) называется *инверсией перестановки*, если $i < j$, то $a_i > a_j$.

Таблицей инверсии перестановки (a_1, a_2, \dots, a_n) называется последовательность (d_1, d_2, \dots, d_n) , где d_j — число элементов, больших j и расположенных левее j .

Задания для самостоятельного выполнения

- 0) Сколькими способами можно расставить 7 книг на книжной полке?
- 1) Сколькими способами можно разложить 8 различных писем по 8 различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?
- 2) Сколько ожерелий можно составить из семи бусин разных размеров?
- 3) Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?
- 4) Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «градус»?
- 5) Сколькими различными способами можно рассадить 6 человек на 6 креслах в кинотеатре?

- 6) Сколько всего шестизначных четных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 5, 7 и 9, если из этих чисел ни одна не повторяется?
- 7) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли взять друг друга?
- 8) Сколько всего семизначных четных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 5, 7 и 9, если из этих чисел ни одна не повторяется?
- 9) Как велико число различных отображений, переводящих множество из n элементов в себя?

2.7. Сочетания без повторений

Сочетаниями из n элементов по m ($m \leq n$) называются неупорядоченные m -элементные выборки из данных n элементов.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Задания для самостоятельного выполнения

- 0) Составьте все сочетания из трех букв А, В, С по две буквы.
- 1) У 6 взрослых и 11 детей обнаружены признаки инфекционного заболевания. Чтобы проверить заболевание, следует взять выборочный анализ у 2 взрослых и 3 детей. Сколькими способами можно это сделать?
- 2) Сколькими способами можно группу из 20 студентов разделить на две подгруппы так, чтобы в одной группе было 13, а в другой 7 человек?
- 3) На книжной полке стоят 3 книги по алгебре, 4 книги по геометрии и 5 книг по литературе. Сколькими способами можно взять с полки три книги по математике?
- 4) Учащийся хочет использовать для раскраски географической контурной карты 4 краски из 6, которые он имеет в своем распоряжении. Сколькими способами он может выбрать 4 краски из 6?
- 5) Даны две параллельные прямые. На одной из них имеется 10 точек, а на другой - 20. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?
- 6) Сколькими способами можно распределить 28 костей домино между 4 игроками так, чтобы каждый получил 7 костей?
- 7) В классе 12 юношей и 13 девушек. Сколькими способами из них можно выбрать четырех учащихся для дежурства на вечере, если а) освободить девушек; б) юноши и девушки?
- 8) Сколькими способами абитуриент может выбрать 3 ВУЗа из 5 для подачи документов?
- 9) Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию в составе восьми человек. Сколькими способами может быть составлена комиссия, если в нее должен входить хотя бы один математик?

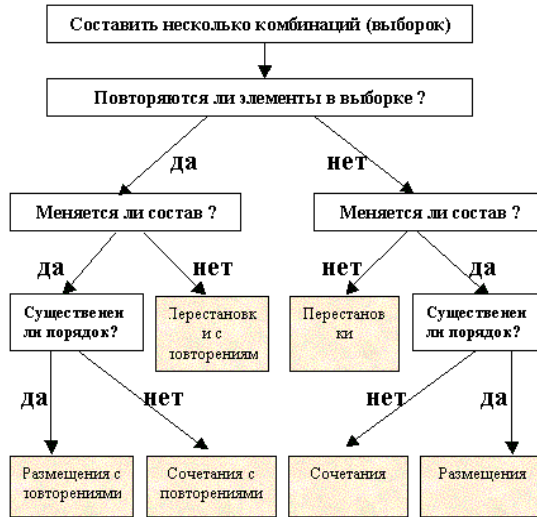


Рис. 1. Алгоритм определения вида комбинации

Практическое занятие № 8. Треугольник Паскаля. Бином Ньютона

Составим таблицу значений сочетаний C_n^m для $n, m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1
1	1	1
2	1	2	1
3	1	3	3	1
4	1	4	6	4	1	.	.	.
5	1	5	10	10	5	1	.	.
6	1	6	15	20	15	6	1	.
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Эту таблицу можно неограниченно продолжать вниз и вправо. Она называется *треугольником Паскаля*. Еще удобнее ее записывать в виде равнобедренного треугольника.

			1					
				1	1			
			1	2	1			
		1	3	3	1			
	1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	

Треугольник Паскаля обладает свойством: *каждое число равно сумме двух чисел, стоящих над ним*, поэтому таблицу можно без труда продолжать вниз, не прибегая к вычислению числа сочетаний. Нам знакомы

формулы:

$$(a+b)^1 = a+b; \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Легко заметить, что коэффициенты в правых частях этих формул взяты из соответствующих строк треугольника Паскаля. Оказывается, при любом натуральном n справедлива формула Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + C_n^n b^n$$

Правую часть формулы называют *разложением степени бинома*. Если вычисляется $(a-b)^n = (a+(-b))^n$, то далее знаки чередуются.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Запишите разложение бинома:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 0) $(2x - y\sqrt{3})^4$; | 1) $(x\sqrt{3} + 3y)^4$; |
| 2) $(5x - y\sqrt{2})^4$; | 3) $(x\sqrt{5} + 2y)^4$; |
| 4) $(3x + y\sqrt{5})^4$; | 5) $(x\sqrt{3} - 2y)^4$; |
| 6) $(2x - y\sqrt{2})^4$; | 7) $(x\sqrt{2} + 4y)^4$; |
| 8) $(4x - y\sqrt{4})^4$; | 9) $(x\sqrt{5} + 3y)^4$; |

Зачетные задания по теме «Комбинаторика»

Задание 1.

- Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C – три дороги. Сколько путей, проходящих через B , ведут из A в C ?
- Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?
- Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для отправки письма?
- Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «камзол»?
- Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»?
- Бросают игральную кость с шестью гранями и запускают волчок, имеющий восемь граней. Сколькими различными способами они могут упасть?
- На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? То же самое при условии, что спуск и подъем происходят по разным путям.

- 7) На ферме есть 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?
- 8) Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата – белый и черный? А если нет ограничений на цвет выбранных квадратов?
- 9) Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

Задание 2.

- 0) В местком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя председателя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать?
- 1) Из состава конференции, на которой присутствует 52 человека, надо избрать делегацию, состоящую из 5 человек. Сколькими способами это можно сделать?
- 2) Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найдти число таких номеров, если используются 32 буквы русского алфавита.
- 3) Сколько различных перестановок можно получить, переставляя буквы в слове «математика»? В слове «парабола»?
- 4) В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток? Сколькими способами можно купить 8 открыток?
- 5) Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?
- 6) Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?
- 7) Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз?
- 8) Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется ровно один туз?
- 9) Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется ровно два туза?

Задание 3. Записать все размещения из элементов множества A по два элемента с повторениями:

- 0) $A = \{2, 7, 9\};$
- 1) $A = \{x, y, z\};$
- 2) $A = \{a, b, c\};$
- 3) $A = \{X, Y, Z\};$
- 4) $A = \{+, -, \times\};$
- 5) $A = \{!, \#, \%\};$
- 6) $A = \{\alpha, \beta, \lambda\}$
- 7) $A = \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow\};$
- 8) $A = \{B, П, МР\};$
- 9) $A = \{Q, W, E\}.$

Задание 9. Сколько трехзначных чисел, меньших заданного числа A , можно образовать, используя цифры 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 без повторений, если:

- 0) $A=450;$ 1) $A=350;$
- 2) $A=250;$ 3) $A=420;$
- 4) $A=410;$ 5) $A=380;$
- 6) $A=370;$ 7) $A=430;$
- 8) $A=390;$ 9) $A=460.$

Задание 11. В соревнованиях участвуют N спортсменов. Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если:

- 0) $N=8;$ 1) $N=7;$ 2) $N=6;$
- 3) $N=9;$ 4) $N=10;$ 5) $N=5;$
- 6) $N=11;$ 7) $N=12;$ 8) $N=15;$
- 9) $N=14.$

Задание 13. В совете директоров компании, состоящего из n человек, при выборе президента за выдвинутую кандидатуру

Задание 4. Записать все размещения из элементов множества A по два элемента без повторений:

- 10) $A = \{2, 7, 9\};$
- 11) $A = \{x, y, z\};$
- 12) $A = \{a, b, c\};$
- 13) $A = \{X, Y, Z\};$
- 14) $A = \{+, -, \times\};$
- 15) $A = \{!, \#, \%\};$
- 16) $A = \{\alpha, \beta, \lambda\}$
- 17) $A = \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow\};$
- 18) $A = \{B, П, МР\};$
- 0) $A = \{Q, W, E\}.$

Задание 10. Сколькими способами N пар, пришедших в кино, могут занять места, если все пять пар сидят подряд и:

- 0) $N=4;$ 1) $N=5;$ 2) $N=7;$
- 3) $N=6;$ 4) $N=8;$ 5) $N=9;$
- 6) $N=3;$ 7) $N=10;$
- 8) $N=12;$ 9) $N=11.$

Задание 12. Сколько существует N -битовых строк, содержащих A нулей и K единиц, если:

- 0) $N=8; A=3, K=5;$ 1) $N=8; A=2, K=6;$
- 2) $N=8; A=4, K=4;$ 3) $N=9; A=2, K=7;$
- 4) $N=9; A=3, K=6;$ 5) $N=9; A=4, K=5;$
- 6) $N=10; A=3, K=7;$ 7) $N=10; A=4, K=6;$
- 8) $N=10; A=2, K=8;$ 9) $N=10; A=5, K=5.$

Задание 14. Сколькими способами из группы в n человек можно сформировать k групп по i человек, s групп по l человек и t групп из j человек, если:

проголосовали k человек, против — j , воздержались — s .
Сколькими способами может быть проведено такое голосование?

- 0) $n=21, k=15, i=4, s=2$;
- 1) $n=23, k=17, i=3, s=3$;
- 2) $n=26, k=19, i=3, s=4$;
- 3) $n=27, k=16, i=7, s=4$;
- 4) $n=29, k=21, i=5, s=3$;
- 5) $n=28, k=14, i=10, s=4$;
- 6) $n=27, k=18, i=3, s=6$;
- 7) $n=26, k=20, i=2, s=4$;
- 8) $n=25, k=23, i=1, s=1$;
- 9) $n=24, k=16, i=5, s=3$.

- 0) $n=15, k=3, i=2, s=2, l=2, m=2, j=1$;
- 1) $n=16, k=2, i=3, s=1, l=2, m=1, j=2$;
- 2) $n=18, k=3, i=1, s=2, l=3, m=2, j=1$;
- 3) $n=17, k=4, i=2, s=2, l=1, m=1, j=1$;
- 4) $n=19, k=3, i=3, s=1, l=2, m=3, j=2$;
- 5) $n=28, k=1, i=5, s=3, l=4, m=2, j=3$;
- 6) $n=27, k=2, i=3, s=1, l=2, m=2, j=3$;
- 7) $n=26, k=2, i=2, s=3, l=3, m=3, j=2$;
- 8) $n=25, k=3, i=2, s=3, l=2, m=2, j=2$;
- 9) $n=24, k=2, i=5, s=2, l=1, m=2, j=2$.

Практическое занятие №9. Графы.

Виды графов. Изоморфизм графов.

Любая система, предполагающая наличие дискретных состояний или наличие узлов и переходов между ними может быть описана графом. Соединения между *узлами* (V) графа называются *ребрами* (E). Если узлы графа не нумерованы, то ребра являются *неориентированными*. У графа с нумерованными узлами ребра *ориентированы* и называются *дугами* (рис. 2).

Пара вершин может быть соединена двумя или более ребрами (дугами), такие ребра (дуги) называются *кратными*. Вершины, соединенные ребром (дугой) называются *смежными*.

Если ребро начинается и заканчивается в одной и той же вершине, то называется *петлей*.

Число ребер, исходящих из вершины v_i (петля учитывается дважды), называется *валентностью (степенью вершины)* и обозначается: $\delta(v_i)$.

Если V и E конечные множества, то и граф им соответствующий называется *конечным*. Граф называется *вырожденным*, если он не имеет ребер.

Неориентированный граф называется *простым*, если он не имеет петель и любая пара вершин соединена не более чем одним ребром. Графы отображаются на плоскости набором точек и соединяющих их линий или векторов. Грани могут отображаться и кривыми линиями, а их длина не играет никакой роли. Граф G называется *планарным (плоским)*, если его можно отобразить в плоскости без пересечения его граней (рис. 5). Граф называется *связным*, если для любых двух вершин существует последовательность ребер их соединяющая (рис. 3), т.е. граф не имеет изолированных фрагментов (вершин, ребер). Граф называется *полным*, если любые две вершины соединены только одним ребром (рис.4). Если полный граф имеет n вершин, то количество ребер будет равно $n(n-1)/2$.

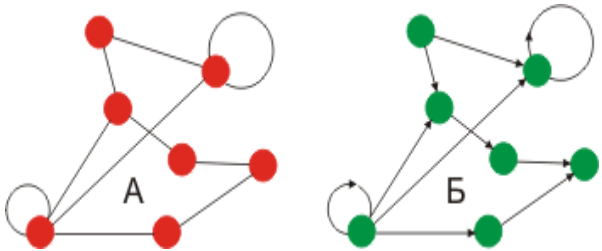


Рис. 2. Примеры А) неориентированного и Б) ориентированного графов.

Специальными видами графов являются **деревья** (рис. 6), кольца и списки, что не входит в рассмотрение нашего курса.

Граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень, называется **регулярным графом**.

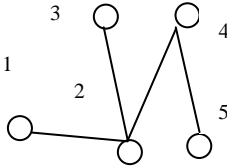


Рис. 3. Пример связного плоского графа

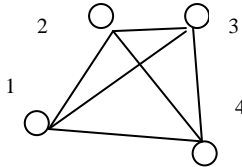


Рис. 4. Пример полного графа

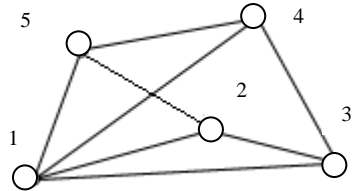


Рис. 5. Пример непланарного графа

Граф $G = (V, E)$ называется **деревом**, если:

1. в нем есть одна *вершина*, в которую не входят *ребра*; она называется **корнем дерева**;
2. в каждую из остальных *вершин* входит ровно по одному *ребру*;
3. все *вершины* достижимы из *корня*.

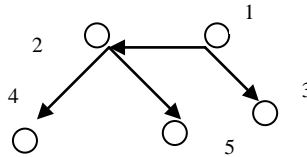


Рис. 6. Пример дерева

Часто на одном множестве объектов определено несколько различных бинарных отношений. Для представления такой ситуации служат **мультиграфы**. Мультиграфы будут использоваться для представления диаграмм конечных автоматов.

Ребро (дуга) и любая из его вершин называются *инцидентными*. Принято говорить, что (дуга) ребро (u, v) *соединяет* вершины u и v . Если вершина не инцидентна ни одному ребру (дуге), то она называется *изолированной* ($\delta(v_i)=0$), если принадлежит только одному ребру (дуге), то называется *висячей* ($\delta(v_i)=1$).

Основные положения о вершинах графа:

1. В графе G сумма степеней всех его вершин — число четное, равное удвоенному числу ребер графа, так как каждое ребро участвует в этой сумме ровно два раза. Этот результат называют *леммой о рукопожатиях*: если несколько человек обменялись рукопожатиями, то общее число пожатых рук обязательно четно, ибо в каждом рукопожатии участвуют две руки (при этом каждая рука считается столько раз, сколько она участвовала в рукопожатиях).

2. Число нечетных вершин любого графа чётно.
3. Во всяком графе с n вершинами, где $n \geq 2$, всегда найдутся, по меньшей мере, две вершины с одинаковыми степенями.
4. Если в графе с вершинами $n > 2$ две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо одна вершина степени 0, либо одна вершина степени $n - 1$.

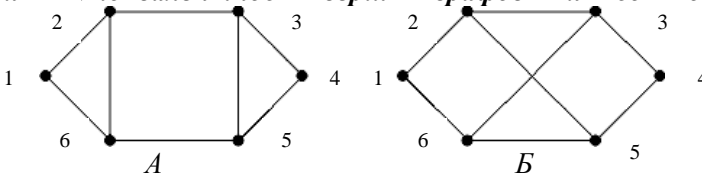
Два графа $G_1=(V_1,E_1)$ и $G_2=(V_2,E_2)$ называются **изоморфными**, если между их вершинами существует взаимно однозначное соответствие.

Алгоритм распознавания изоморфизма двух графов $G_1(X, E)$ и $G_2(Y, E)$

1. Если $X \neq Y$, то графы не изоморфны.
2. Выписываем все элементы обоих графов, определяя пары (x_i, x_j) и (y_i, y_j) для каждого элемента, где x_i, y_i - число исходов для каждой вершины обоих графов, а x_j, y_j - число заходов.
3. Для каждого элемента x графа G_1 ищем такой элемент y графа G_2 , что выполняется условие: число исходов x совпадает с числом исходов y , и число заходов x совпадает с числом заходов y . Найденные элементы x и y соединяем дугой, т.е. строим граф соответствия. Если соответствия нет, то графы не изоморфны.
4. Выписываем подстановку, которая переводит граф G_1 в граф G_2 .

Примеры выполнения заданий

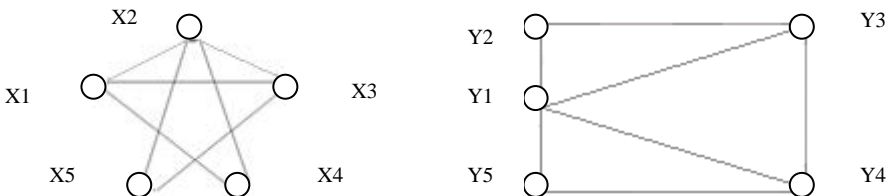
1. Докажите, что валентности вершин графов А и Б совпадают.



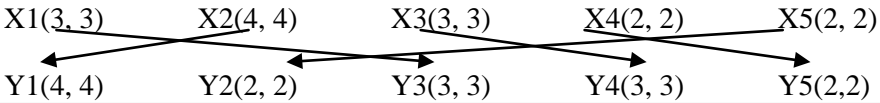
Решение: А) $\delta(v_1)=2, \delta(v_2)=3, \delta(v_3)=3, \delta(v_4)=2, \delta(v_5)=3, \delta(v_6)=3$.

Б) $\delta(v_1)=2, \delta(v_2)=3, \delta(v_3)=3, \delta(v_4)=2, \delta(v_5)=3, \delta(v_6)=3$.

2. Докажите, что графы $G_1(X_1, E_1)$ и $G_2(Y_2, E_2)$ изоморфны.



Решение:



В результате получим подстановку:

$$\begin{pmatrix} X1 & X2 & X3 & X4 & X5 \\ Y3 & Y1 & Y4 & Y5 & Y2 \end{pmatrix}$$

Следовательно, графы $G_1(X, E)$ и $G_2(Y, E)$ изоморфны.

3. Решите задачу по вычислению валентности вершин графа

Школьник сказал своему приятелю: - У нас в классе 35 человек. Каждый из них дружит ровно с 11 одноклассниками... - Не может этого быть, - сразу ответил приятель, победитель математической олимпиады. Почему он так решил?

Решение: представим себе, что между каждыми двумя друзьями протянута ниточка. Тогда каждый из 35 учеников будет держать в руке 11 концов ниточек, и значит, всего у протянутых ниточек будет $11 \cdot 35 = 385$ концов. Но общее число не может быть нечётным, так как у каждой ниточки 2 конца.

4. Решите задачу по выявлению связности компонент графа

В компании из 7 мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трех братьев. Докажите, что все семеро — братья.

Решение: возьмём любых двух мальчиков из этой компании. Предположим, что они не братья. Тогда каждый из них имеет среди оставшихся по три брата. По принципу Дирихле¹, у них есть общий брат, а значит, они братья. Итак, любые два мальчика из этой компании — братья, что и требовалось доказать.

5. Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $(n - 1)/2$, - связан.

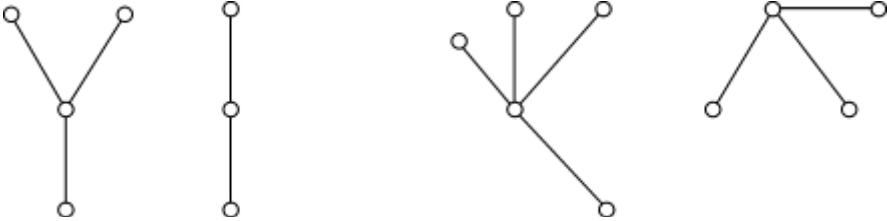
Решение: рассмотрим две произвольных вершины и предположим, что они не соединены путем, то есть такой последовательностью ребер, в которой начало очередного ребра, совпадает с концом предыдущего.

¹ Самая популярная формулировка принципа Дирихле звучит так:

"Если в n клетках сидит $n+1$ или больше зайцев, то найдётся клетка, в которой сидят, по крайней мере, два зайца".

Каждая из этих двух вершин по условию соединена не менее, чем с $(n - 1)/2$ другими; при этом все упомянутые вершины различны - ведь если какие-то две из них совпадают, то есть путь, соединяющий исходные вершины. Таким образом, мы указали не менее $(n - 1)/2 + (n - 1)/2 + 2 = n + 1$ вершин. Противоречие.

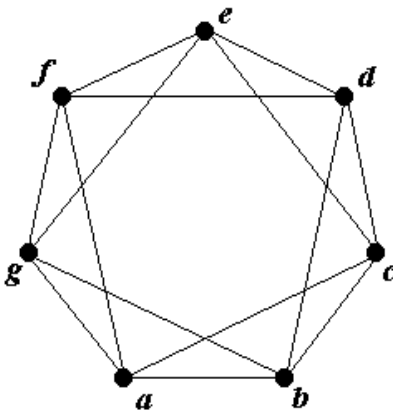
6. Определите, являются ли данные графы деревьями:



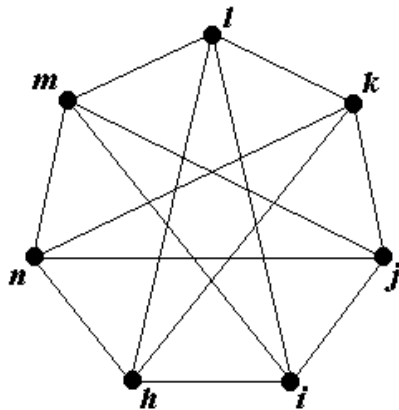
Ответ: да, все указанные графы являются деревьями согласно свойствам деревьев.

Задания для самостоятельного выполнения

3.1.1. Докажите, что валентности вершин графов А и Б совпадают.



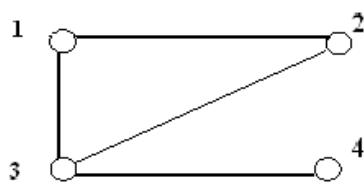
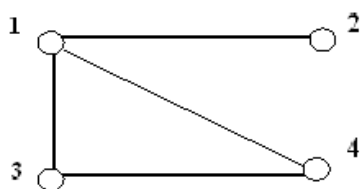
А



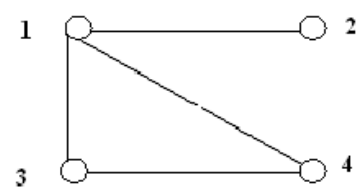
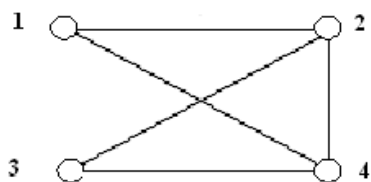
Б

3.1.2. Заданы два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$. Выясните, изоморфны ли графы?

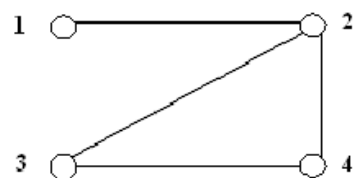
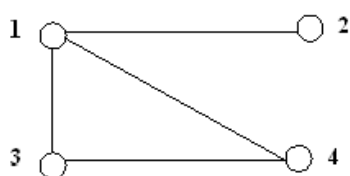
0)



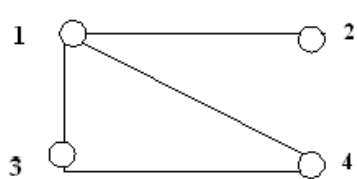
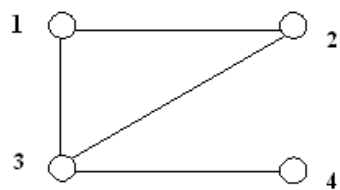
1)



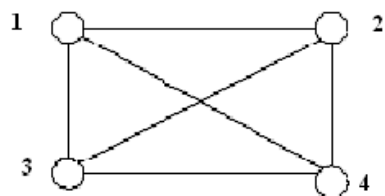
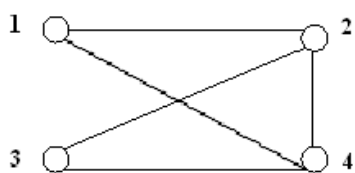
2)



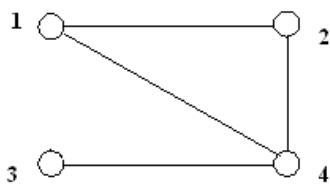
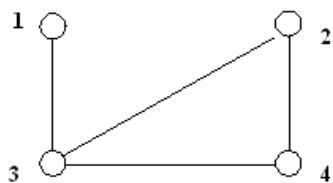
3)



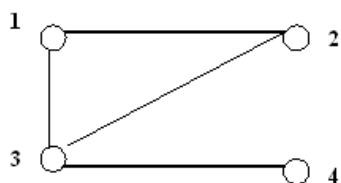
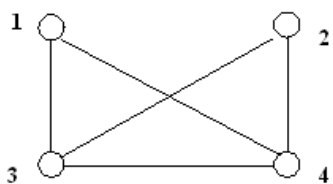
4)



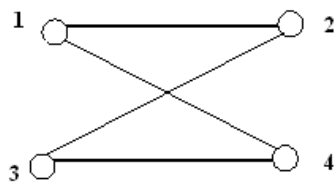
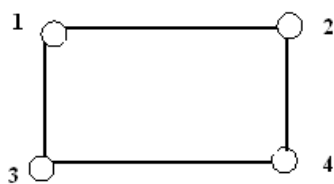
5)



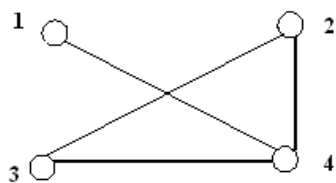
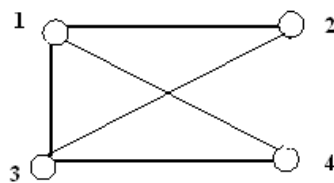
6)



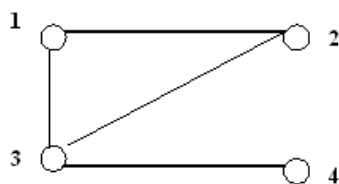
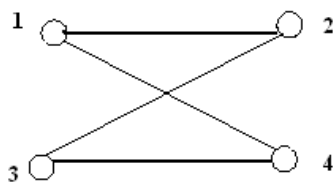
7)



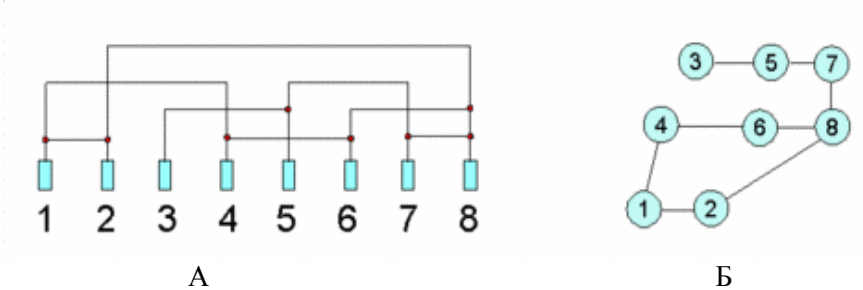
8)



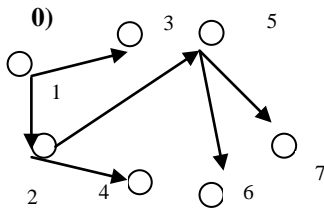
9)



3.1.3. Докажите, что графы А и Б изоморфны.

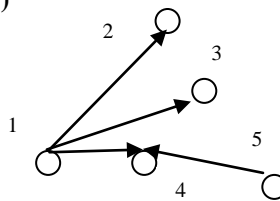


3.1.4. Определите, являются ли данные графы деревьями, почему?



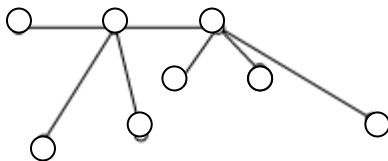
Решение:

1)



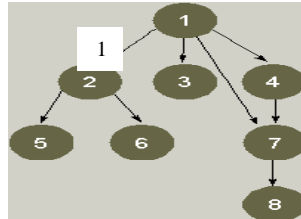
Решение:

2)



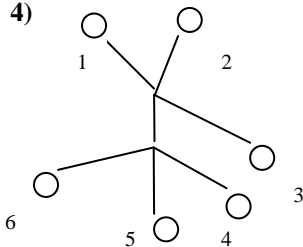
Решение:

3)



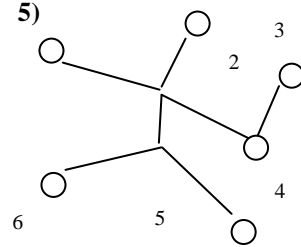
Решение:

4)



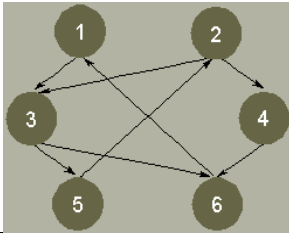
Решение:

5)

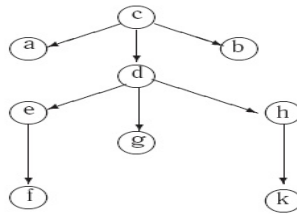


Решение:

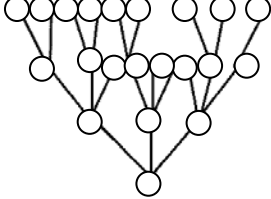
6)

Решение:

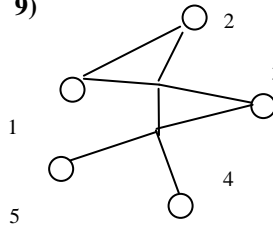
7)

Решение:

8)

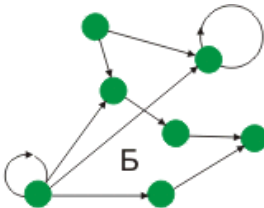
Решение:

9)

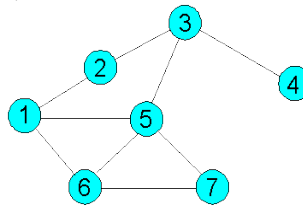
Решение:

3.1.5. Определите виды графов и подсчитайте валентность вершин:

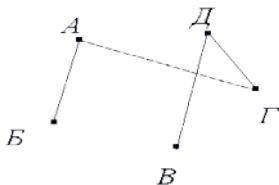
0)

Решение:

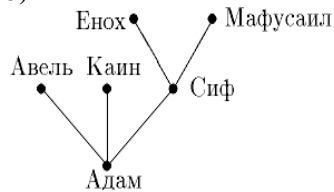
1)

Решение:

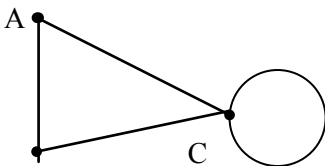
2)

Решение:

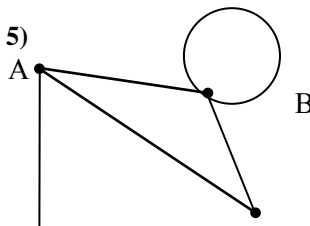
3)

Решение:

4)

Решение:

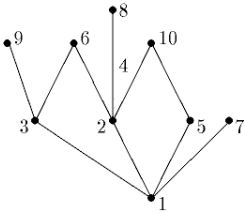
5)

Решение:

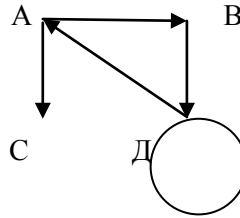
В

С ————— Д

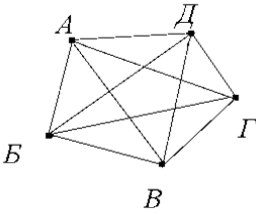
6)

Решение:

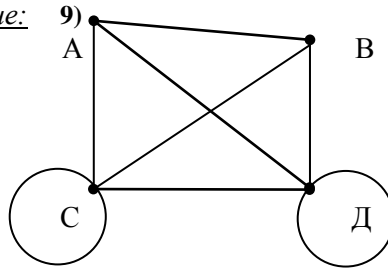
7)

Решение:

8)

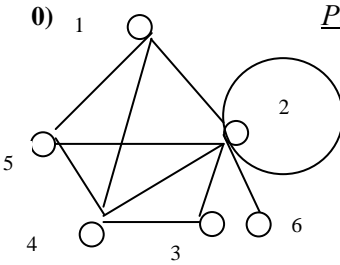
Решение:

9)

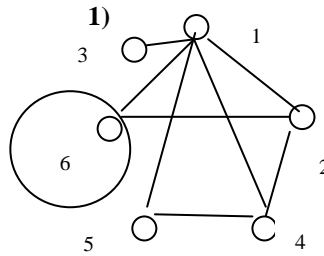
Решение:

3.1.6. Определите виды графов и подсчитайте валентность вершин:

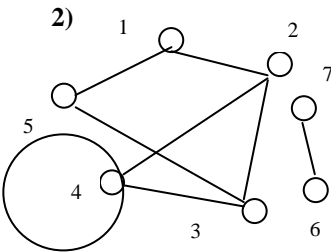
0)

Решение:

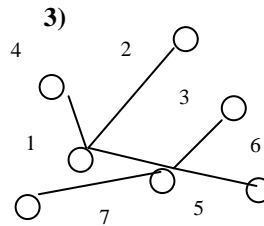
1)

Решение:

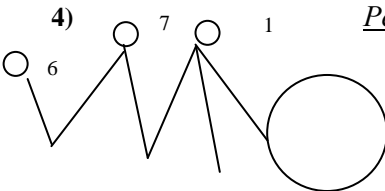
2)

Решение:

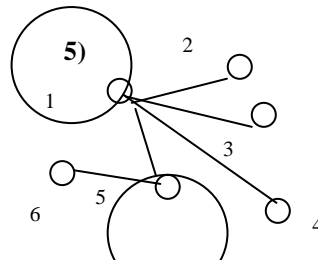
3)

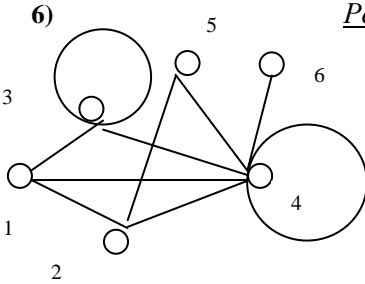
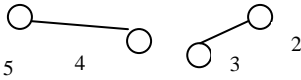
Решение:

4)

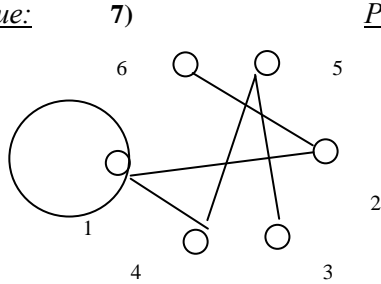
Решение:

5)

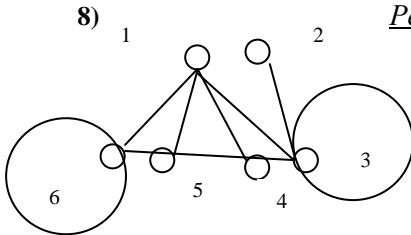
Решение:



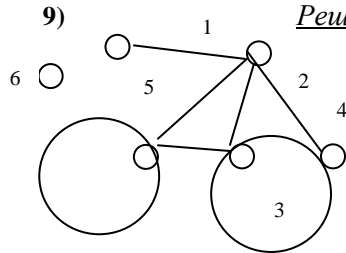
Решение:



Решение:



Решение:



Решение:

Практическое занятие №10.

3.3.1. Неориентированные графы

Неориентированный граф $G(V, E)$ – непустое конечное множество узлов (вершин) V и набор неупорядоченных пар вершин (ребер) E .

Способы задания графа:

- 1) аналитический (в виде алгебраической системы);
- 2) геометрический (в виде произвольного рисунка);
- 3) матричный (в виде матриц смежности и инцидентности).

Пусть v_1, v_2, \dots, v_n - вершины графа $G(V, E)$, а e_1, e_2, \dots, e_m - его ребра.

Матрицей смежности графа G называется матрица $A(G) = \|a_{ij}\|$, $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, n$, у которой элемент a_{ij} равен числу ребер, соединяющих вершины v_i и v_j (соответственно, идущих из вершины v_i в вершину v_j).

Свойства матрицы смежности:

- 1) симметричная относительно главной диагонали,
- 2) значениями являются натуральные числа и ноль,
- 3) количество петель записывается на главной диагонали,

4) сумма значений по строке или в столбце равна валентности вершины.

Матрицей инцидентности для неориентированного графа с n вершинами и m ребрами называется матрица $B(G) = [b_{ij}]$, $i=1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы - ребрам. Элемент $b_{ij}=1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j и $b_{ij}=0$, если вершина v_i не инцидентна ребру e_j .

Свойства матрицы инцидентности:

- 1) несимметричная,
- 2) значениями являются ноль и единица,
- 3) сумма значений по строке или в столбце равна 2, если нет петель.

Примеры выполнения заданий

1. Граф $G(V, E)$: $V=\{a, b, c, d\}$,

$E=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a),(c,d),(d,c)\}$ задан как алгебраическая система.

а) Выясните, является ли заданное отношение эквивалентным.

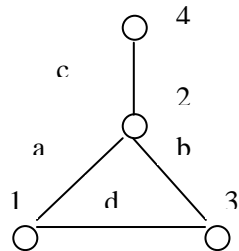
б) Для приведенного отношения задайте граф геометрически.

с) Постройте для графа матрицу смежности и матрицу инцидентций.

Решение а):

нарушено условие рефлексивности – отсутствуют: (a,a) , (b,b) , (c,c) , (d,d) , поэтому заданное отношение R не является эквивалентным.

Решение б):



Решение с): матрица смежности

$A(G)=$

	1	2	3	4
1	2	1	1	1
2	1	2	1	1
3	1	1	2	0

матрица инцидентности

$B(G)=$

	a	b	c	d
1	1	0	0	1
2	1	1	1	0
3	0	1	0	1

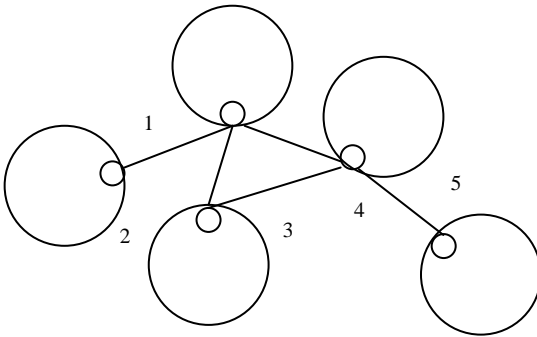
4	0	1	0	2
---	---	---	---	---

4	0	0	1	0
---	---	---	---	---

2. Граф $G(V,E)$: задан геометрически.

а) Задайте граф $G(V,E)$ как алгебраическую систему.

б) Выясните, является ли заданное отношение отношением эквивалентности



Решение:

а) $V = \{1, 2, 3, 4, \}$,

$E = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3), (3,4), (4,3), (1,4), (4,4), (4,1), (4,5), (5,4), (5,5)\}$

б) Нарушено условие транзитивности.

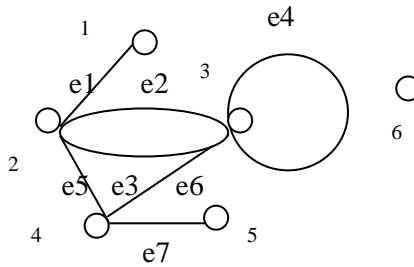
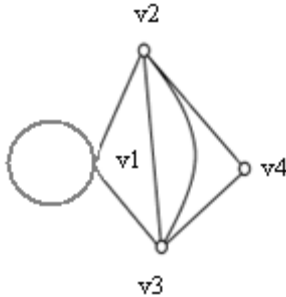
Отсутствуют пары $(2,4)$, $(4,2)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(2,5)$, $(5,2)$, $(1,5)$, $(5,1)$, поэтому отношение R не является эквивалентным.

3. Графы $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ заданы геометрически.

Постройте:

а) для графа $G_1(V_1, E_1)$ матрицу смежности,

б) для графа $G_2(V_2, E_2)$ матрицу смежности и матрицу инцидентности.



Решение:

Матрица смежности:

$$A(G) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Решение:

Матрицы смежности и инцидентий:

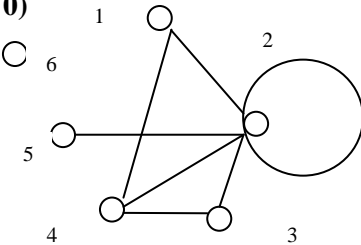
$$A(G) = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B(G) = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Задания для самостоятельного выполнения

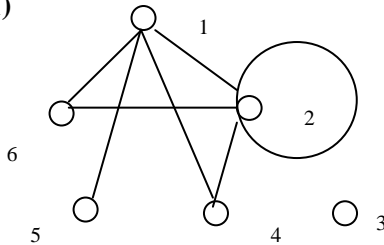
3.3.1.2. Постройте для графа $G(V,E)$, заданного геометрически

а) матрицу смежности; б) матрицу инцидентий.

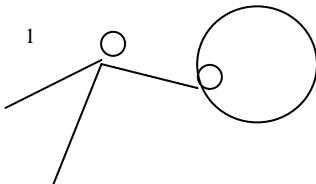
0)



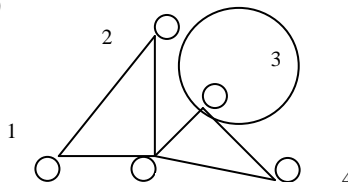
1)

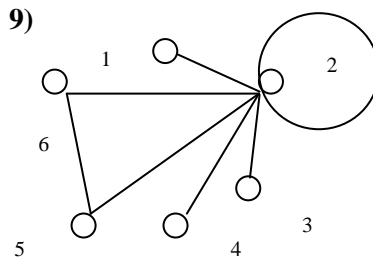
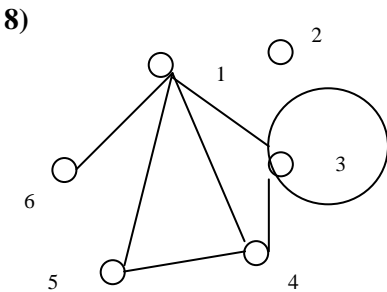
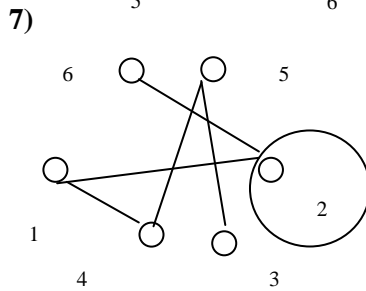
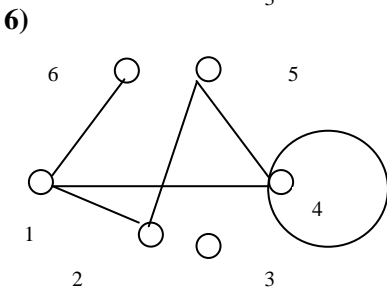
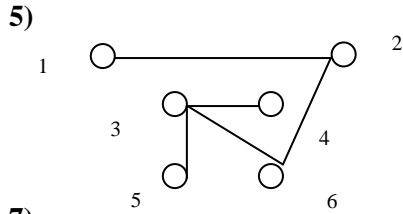
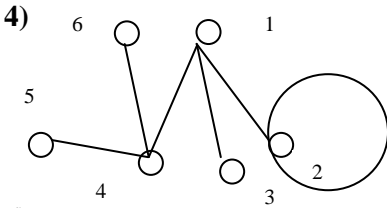
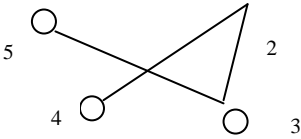


2)



3)





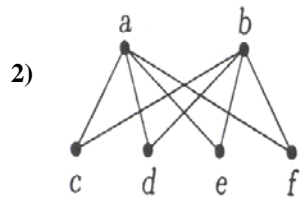
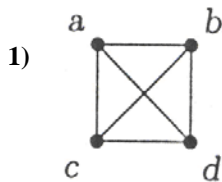
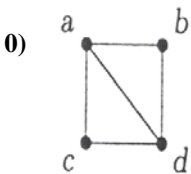
3.3.1.4. Постройте для графа $G(V,E)$, заданного геометрически

1) Матрицу смежности и матрицу инцидентности.

2) Задайте граф как алгебраическую систему.

3) Подсчитайте валентность вершин.

4) Определите тип графа.



3.3.2. Ориентированные графы

Ориентированный граф (или *орграф*) $G_1(V, E)$ – непустое конечное множество узлов (*вершин*) V и набор упорядоченных пар вершин (*дуг*) E .

Пусть v_1, v_2, \dots, v_n – вершины графа $G_1(V, E)$, а e_1, e_2, \dots, e_m – его дуги.

Матрицей смежности графа G_1 называется матрица $A(G_1) = \|a_{ij}\|$, $i=1, \dots, n$;

$j=1, \dots, n$, у которой элемент a_{ij} равен числу дуг, соединяющих вершины v_i и v_j (соответственно, идущих из вершины v_i в вершину v_j).

Свойства матрицы смежности:

- 1) несимметричная, в общем случае, относительно главной диагонали,
- 2) значениями являются натуральные числа и ноль,
- 3) количество петель записывается на главной диагонали,
- 4) сумма значений по строке (столбце) равна валентности вершины.

Матрицей инцидентности для ориентированного графа с n вершинами и m дугами называется матрица $B(G_1) = [b_{ij}]$, $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, m$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – дугам. Ее элемент: $b_{ij}=1$, если дуга e_j выходит из вершины v_i ; $b_{ij}=-1$, если дуга e_j входит в вершину v_i ; $b_{ij}=0$, если вершина v_i не инцидентна дуге e_j .

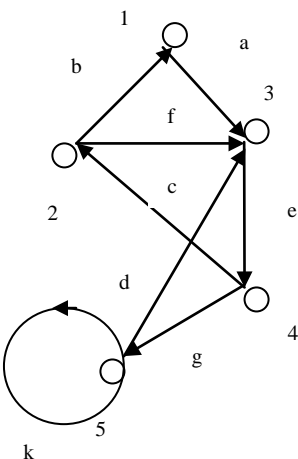
Свойства матрицы инцидентности:

- 1) несимметричная, 2) значениями являются -1, ноль и 1.

Примеры выполнения заданий

1. Орграф $G_1(V, E)$ задан геометрически. Постройте для орграфа:

а) матрицу смежности; б) матрицу инцидентности.



Решение а): матрица смежности $A(G_1)=$

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	0	0
2	1	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1

Решение б): матрица инцидентности $B(G_1)=$

	a	b	c	d	e	g	f	k
1	1	-1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	-1	0	0	0	1	0
3	-1	0	0	-1	1	0	-1	0

4	0	0	1	0	-1	1	0	0
5	0	0	0	1	0	-1	0	0

2. Решите следующую задачу по обходу графов:

В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

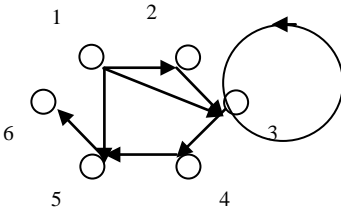
Решение:

Пусть в столицу входит a дорог. Тогда общее число "входящих" дорог равно $21 \cdot 100 + a$, а общее количество "выходящих" дорог не больше $20 \cdot 100 + (100 - a)$. Поэтому $21 \cdot 100 + a \leq 20 \cdot 100 + (100 - a)$, то есть $2a \leq 0$. Таким образом, $a = 0$.

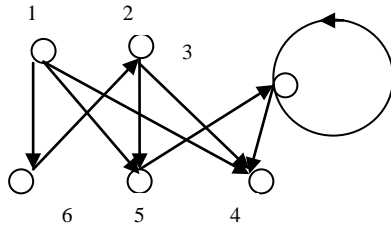
Задания для самостоятельного выполнения

3.3.2.2. Орграф задан геометрически. Укажите валентность вершин. Постройте матрицу смежности орграфа.

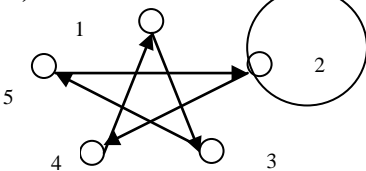
0)



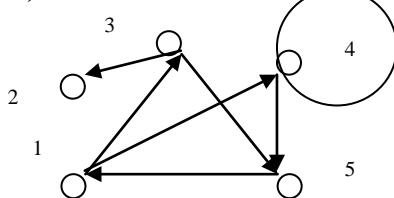
1)



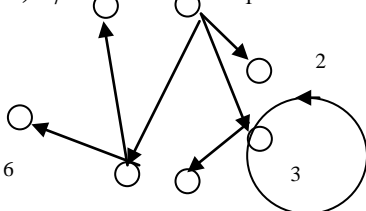
2)



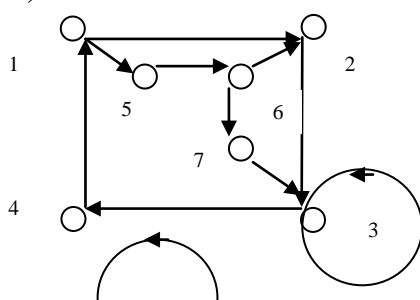
3)

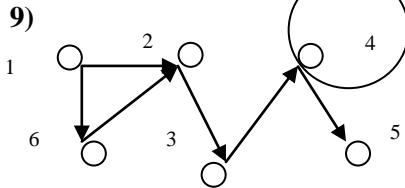
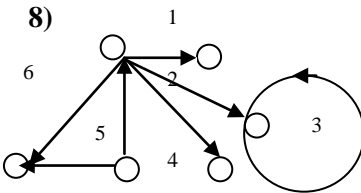
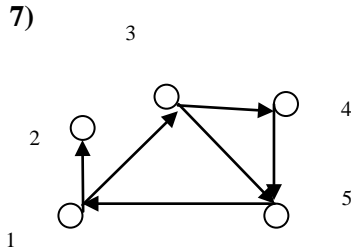
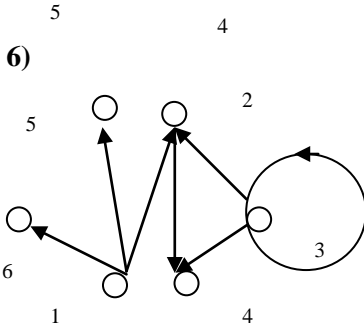


4)



5)





3.3.2.3. Дана матрица смежности орграфа. а) Задайте орграф геометрически, в) постройте матрицу инцидентности.

0) $\begin{pmatrix} 010010 \\ 100100 \\ 010100 \\ 011010 \\ 000100 \\ 100000 \end{pmatrix}$ 1) $\begin{pmatrix} 100001 \\ 001100 \\ 001100 \\ 001010 \\ 001100 \\ 000000 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 000010 \\ 100010 \\ 010000 \\ 010011 \\ 000110 \\ 000010 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 110001 \\ 001000 \\ 001100 \\ 010010 \\ 001100 \\ 010000 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 000001 \\ 001101 \\ 001100 \\ 001000 \\ 000110 \\ 000010 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 111000 \\ 100001 \\ 011001 \\ 001010 \\ 000100 \\ 010000 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 011100 \\ 101000 \\ 010001 \\ 010011 \\ 001100 \\ 001000 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 100010 \\ 100110 \\ 001100 \\ 001010 \\ 010100 \\ 000000 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 010000 \\ 000100 \\ 010100 \\ 010010 \\ 001100 \\ 001000 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 011010 \\ 001000 \\ 011000 \\ 110000 \\ 100100 \\ 100000 \end{pmatrix}$

Практическое занятие №11.

3.4. Задачи оптимизации на графах

Если дуге ориентированного графа $G_1 (V, E)$ поставлено в соответствие некоторое вещественное число $a(u, v)$, называемое *весом*, то последовательность вершин v_0, v_1, \dots, v_p определяет путь в G_1 а его

длина определяется как сумма весов: $\sum_{i=1}^n a(v_{i-1}, v_i)$. Если в

произвольном графе вес каждой дуги равен единице, то длина пути равна числу дуг.

Задача о кратчайшем пути возникает чаще всего при решении транспортных и дискретных задач динамического программирования и др. Длину кратчайшего пути обозначают $r(v_i, v_j)$ и называют *расстоянием* от v_i до v_j (расстояние может быть отрицательным). Для любого орграфа можно построить *матрицу расстояний* $R = r(i, j)$. Заполняется матрица построчно, выбирая вершину слева (справа). Значением является наименьшее число дуг, связывающее вершину слева с одной из вершин строки.

Если не существует ни одного пути из v_i в v_j , то полагаем $r(v_i, v_j) = \infty$. Если каждый контур нашего графа имеет положительную длину, то *кратчайший* путь будет всегда *элементарным* путем, т.е. в последовательности v_1, \dots, v_p не будет повторов.

Среднее отклонение вершины v_i от центра графа $D(v_i)$ равно:

$$D(v_i) = \frac{1}{m} \sum_{v \in V} r(v_i, v),$$

где m - число дуг в графе, v - пробегает вершины графа, n – количество вершин графа, $i = 1..n$.

Вершина, для которой $D(v_i)$ окажется минимальным, называется *центром графа* (возможно несколько вершин – центр графа).

Путем или маршрутом на графе $G_1(V, E)$ называется последовательность его вершин и ребер $v_1e_1v_2e_2v_3...v_n e_n v_{n+1}$, в которой любые два соседних элемента инцидентны. *Путь* называется *простым*, если все *ребра* и все *вершины* на нем, кроме первой и последней, различны.

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различные. Маршрут называется *простой цепью*, если все его вершины, а значит и ребра, различные.

Циклом в графе называется *путь*, в котором начальная вершина совпадает с конечной и который содержит хотя бы одно ребро.

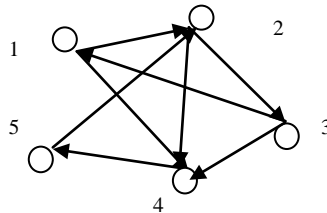
Цикл $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v_1)$ называется *простым*, если в нем нет одинаковых вершин, кроме первой и последней, т.е. если все вершины v_2, \dots, v_{n-1} различны.

Если в графе нет циклов, то он называется *ациклическим*.

Теперь можно иначе определить понятие дерева. Связный граф без циклов называется *деревом*.

Примеры выполнения заданий

1. Орграф задан геометрически. Постройте матрицу расстояний. Вычислите центр орграфа.



Решение:

построим матрицу расстояний:

$R = r(i, j)$:

	1	2	3	4	5
1	0	1	2	1	3
2	2	0	1	1	2
3	1	2	0	1	2
4	4	2	3	0	1
5	3	1	2	2	0

Общее число дуг $m = 8$.

Рассчитываем отклонения от центра графа:

$$D(1) = 7/8;$$

$$D(2) = D(3) = 6/8 = 3/4;$$

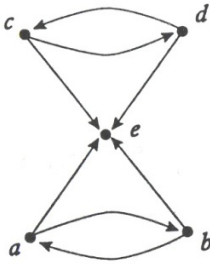
$$D(4) = 10/8 = 5/4;$$

$$D(5) = 8/8 = 1.$$

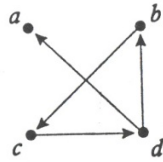
Итак, центром графа являются вершины 2 и 3.

2. Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы - квадраты со стороной b , всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке А? (Стороны квадрата - тоже улицы).

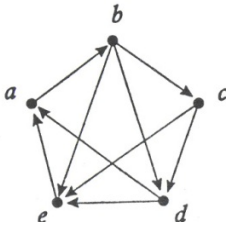
а)



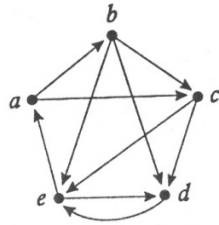
б)



в)

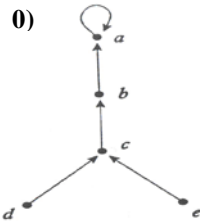


г)

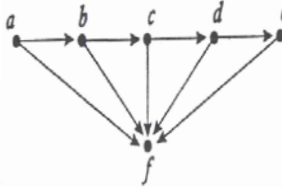


3.4.2. Орграф задан геометрически. Постройте матрицу расстояний. Вычислите центр орграфа.

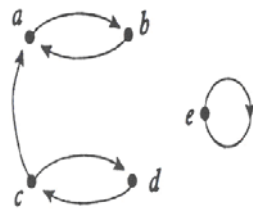
0)



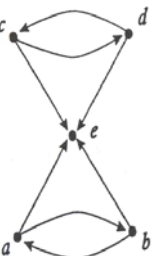
1)



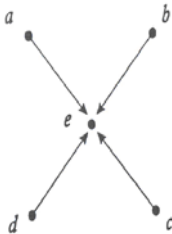
2)



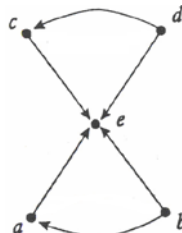
3)



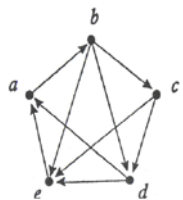
4)



5)



6)



Практическое занятие №12.

3.5. Эйлеровы и гамильтоновы графы

Эйлеровым путем в графе называется путь, содержащий все ребра графа.

Эйлеровым циклом в графе называется цикл, содержащий все ребра графа.

Связный граф G называется *эйлеровым* (см. рис. 7), если существует замкнутая цепь, проходящая через каждое его ребро только один раз. Такая цепь называется *эйлеровой цепью*. Если снять ограничение на замкнутость цепи, то граф называется *полуэйлеровым* (см. рис. 8). На рис.9 приведен пример не эйлерова графа.

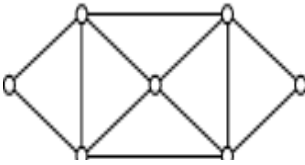


Рис.7. Эйлеров граф
эйлеров граф

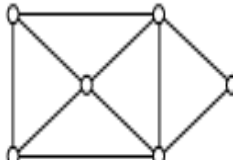


Рис.8. Полуэйлеров граф

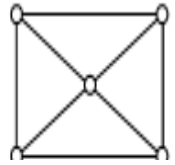


Рис.9. Не

Критерий эйлеровости графа

Связный неориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин (валентность) – чётные числа.

Следовательно, замкнутую фигуру, в которой все вершины - четные, можно начертить одним росчерком без повторений, начиная обводить ее с любой точки.

Формула Эйлера: Для всякого плоского представления связного плоского графа без перегородок число вершин (V), число ребер (E) и число граней² с учетом бесконечной (R) связаны соотношением $V - E + R = 2$.

Связный оргграф содержит эйлеров контур тогда и только тогда, когда для каждой вершины число входящих дуг равно числу выходящих.

Пример: эйлеровым графом может быть план выставки. Это позволяет так расставить указатели маршрута, чтобы посетитель смог пройти по каждому залу в точности по одному разу.

Гамильтоновой цепью называется простая цепь, содержащая все вершины графа. *Гамильтоновым циклом* называется простой цикл, содержащий все вершины графа.

Теорема Дирака: если в простом графе с $n \geq 3$ вершинами степень каждой вершины не меньше $n/2$, то такой граф обязательно будет гамильтоновым (см. рис. 10).

Граф, который содержит простую цепь, проходящую через каждую его вершину, называется *полугамильтоновым* (см. рис. 11). На рис.12 приведен пример не гамильтонова графа.

Критерий же существования гамильтонова цикла в произвольном графе еще не найден.

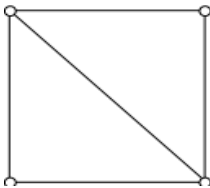


Рис.10. Гамильтонов граф

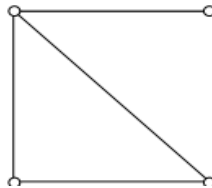


Рис.11. Полугамильтонов граф

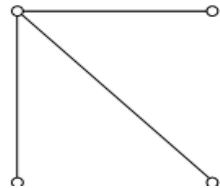


Рис.12. Не граф

Рассмотрим несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов в графе.

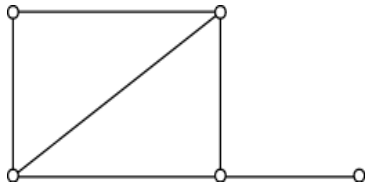
² Гранью в плоском представлении графа называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.

1) *всякий полный граф является гамильтоновым.* Действительно, он содержит такой простой цикл, которому принадлежат все вершины данного графа.

2) *если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым.*

Пример: если гамильтонов граф объединить с еще одной вершиной ребром так, что образуется висячая вершина, то такой граф гамильтоновым не является, поскольку не содержит простого цикла, проходящего через все вершины графа.

Не является гамильтоновым и граф, представляющий собой простой цикл с "перекладиной", на которой расположены одна или несколько вершин



Примеры выполнения заданий

1. Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо "красный", либо "синий" граф не является плоским.

Решение:

Пусть оба эти графа - плоские. Тогда у них вместе не более, чем $(3 \cdot 11 - 6) + (3 \cdot 11 - 6) = 54$ ребра. Однако в полном графе с 11 вершинами 55 ребер. Противоречие.

2. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, - не плоский.

Решение:

Не выполняется неравенство $3V - 6 \geq E$.

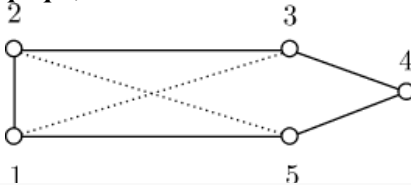
3. Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники, причем так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.

Решение:

Докажите сначала неравенство $E \leq 3V - 6$, используя то, что из каждой вершины выходит по крайней мере 3 ребра. Обозначим количество пятиугольников через a , количество шестиугольников через b .

Заметим, что $5a + 6b + 7 = 2E \leq 6F - 12 = 6(a + b + 1) - 12$. Отсюда $a \geq 13$.

4. Граф задан геометрически. А) Определите, содержит ли данный граф гамильтонов цикл? Б) Выпишите гамильтонов цикл у данного графа, если он есть:

Решение:

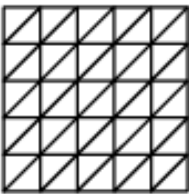
А) да, содержит, т.к. граф – полный и не содержит перекладин и висячих вершин.

Б) гамильтонов цикл выделен сплошной линией: (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1).

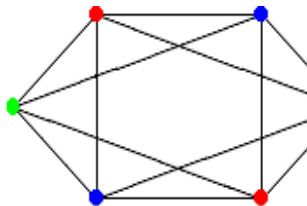
Задания для самостоятельного выполнения

3.5.1. Можно ли нарисовать картинки, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждую линию ровно один раз? Какие из них являются эйлеровыми графами?

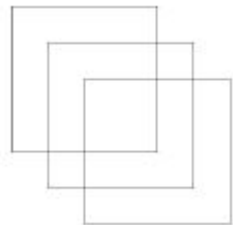
0)



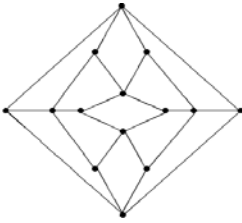
1)



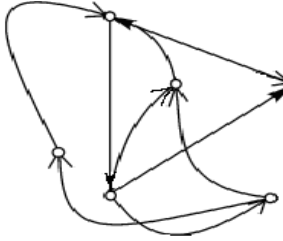
2)



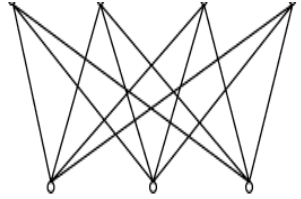
3)



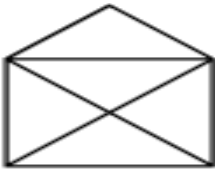
4)



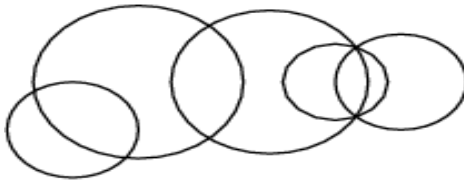
5)



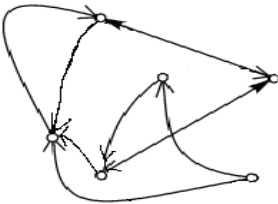
6)



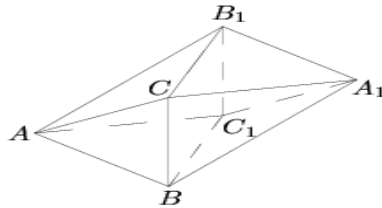
7)



8)

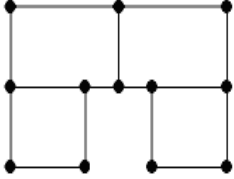
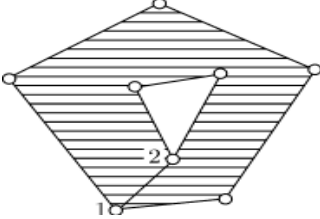
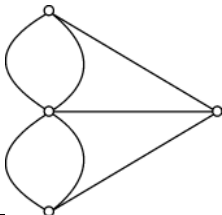
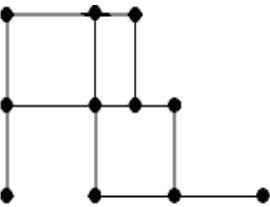
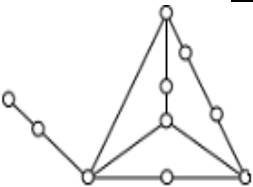
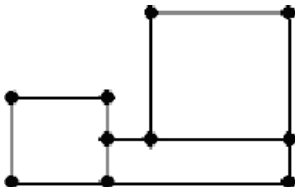
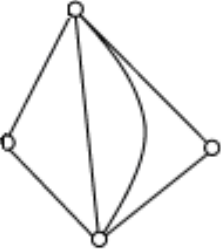
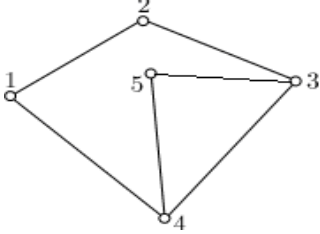


9)



3.5.3. Граф задан геометрически. Выпишите гамильтонов цикл у данного графа, если он есть:

<p>0)</p> <p><u>Решение:</u></p>	<p>1)</p> <p><u>Решение:</u></p>
<p>2)</p> <p><u>Решение:</u></p>	<p>3)</p> <p><u>Решение:</u></p>

	
<p>4) <u>Решение:</u></p> 	<p>5) <u>Решение:</u></p> 
<p>6) <u>Решение:</u></p> 	<p>7) <u>Решение:</u></p> 
<p>8) <u>Решение:</u></p> 	<p>9) <u>Решение:</u></p> 

Практическое занятие №13.

Глава 4. Автоматы

Система $A=(X;Q;Y;\varphi;\psi)$ называется конечным автоматом,

где

- $X = \{a_1, \dots, a_m\}$ - входной алфавит с входными сигналами,
- $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ - множество состояний,
- $Y = \{b_1, \dots, b_p\}$ - выходной алфавит с выходными сигналами,
- $\varphi : X \times Q \rightarrow Q$ - функция переходов, т.е. $\varphi(x, q) \in Q \forall x \in X; \forall q \in Q$,
- $\psi : X \times Q \rightarrow Y$ - функция выходов, т.е. $\psi(x, q) \in Y \forall x \in X; \forall q \in Q$.

Существуют следующие способы задания автоматов:

- **с помощью таблицы.** Функции φ и ψ задаются таблицей, строки которой соответствуют буквам входного алфавита, а столбцы – состояниям. В пересечении строки a_j и столбца q_i помещается состояние

$\varphi(a_j, q_i)$, в которое переходит автомат из состояния q_i под воздействием входного символа a_j , и значение $\psi(a_j, q_i)$, которое при этом появляется на выходе;

- **в виде диаграммы.** Состояния q_i изображаются на плоскости кружками, из которого проводится стрелка в q_u , если автомат, находящийся в состоянии q_i , при подаче некоторого входного символа может быть переведен в состояние q_u ;

- **совокупностью четверок вида:** $q_i a_j \rightarrow q_l a_p$. Если на вход автомата, находящегося в состоянии q_i , в момент времени t подается символ a_j , то на выходе автомата в этот же момент времени появляется символ a_p , и в следующий момент времени $t+1$ автомат будет находиться в состоянии q_l .

- **в виде системы булевых функций.** Каждому $q_j \in Q$ взаимно-однозначно ставится в соответствие двоичная последовательность длины r - двоичный код $\alpha(q) = z_1 z_2 \dots z_r$. Аналогично каждому $a_i \in X$ и каждому $b_k \in Y$ ставим взаимно-однозначно в соответствие двоичные последовательности $\beta(a) = x_1 x_2 \dots x_k$; $\gamma(b) = y_1 y_2 \dots y_s$. В результате автомат будет задан системой булевых функций $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s\}$;

- **в виде канонических уравнений.** Если в момент времени $t=1,2,\dots$ на вход автомата $A=(X; Q; Y; \varphi; \psi)$ последовательно подаются входные символы $x(t) \in X$ и при этом автомат находится в состоянии $q(t) \in Q$, то под воздействием символа $x(t)$ автомат перейдет в новое состояние $q(t+1) \in Q$ и выдаст выходной сигнал $y(t)$. Величины $x(t)$, $y(t)$, $q(t)$, $q(t+1)$ связаны между собой следующими каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} q(t+1) = \varphi(x(t); q(t)), \\ y(t) = \psi(x(t); q(t)), \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots, n$$

К задачам теории автоматов относятся: задачи анализа и синтеза автоматов, задачи полноты, минимизации, эквивалентных преобразований автоматов и другие.

4.1. Задачи анализа автоматов

Задача анализа состоит в том, чтобы по заданному описанию автомата (или по неполным данным об автомате и его функционированию) задать его поведение и установить те или иные его свойства.

Примеры выполнения заданий

1. Работа автомата задана таблично и выдает на выходе символ “*”, всякий раз, когда во входном алфавите встречается цепочка из комбинаций символов 0, 1, 2. Опишите работу автомата с помощью совокупности четверок. $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$ и $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$. Определите, что распознает автомат.

Символы алфавита	С о с т о я н и я			
	q_0	q_1	q_2	q_3
0	$q_1, 1$	$q_2, 1$	$q_0, 0$	$q_0, 0$
1	$q_0, 1$	$q_0, 1$	$q_0, 1$	$q_0, 1$
2	$q_0, 2$	$q_0, 2$	$q_3, 1$	$q_0, *$

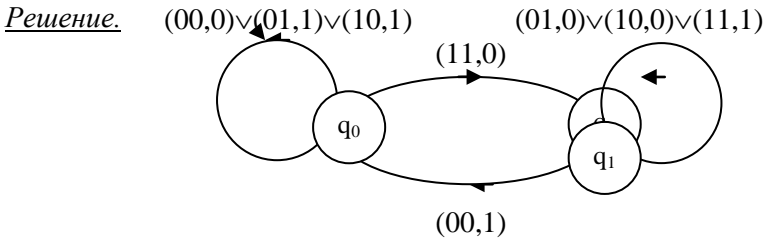
Решение: $q_0 0 \rightarrow q_1 1$ $q_1 0 \rightarrow q_2 1$ $q_2 0 \rightarrow q_0 0$ $q_3 0 \rightarrow q_0 0$
 $q_0 1 \rightarrow q_0 1$ $q_1 1 \rightarrow q_0 1$ $q_2 1 \rightarrow q_0 1$ $q_3 1 \rightarrow q_0 1$
 $q_0 2 \rightarrow q_0 2$ $q_1 2 \rightarrow q_0 2$ $q_2 2 \rightarrow q_3 1$ $q_3 2 \rightarrow q_0 *$

Автомат распознает цепочку вида: 1111*

2. Описание автомата - двоичного сумматора последовательного действия, задано с помощью совокупности четверок. $X = \{00, 01, 10, 11\}$,

$Y = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1\}$. Опишите работу автомата с помощью диаграммы.

$q_0 < 0, 0 > \rightarrow q_0 0$	$q_1 < 0, 0 > \rightarrow q_0 1$
$q_0 < 0, 1 > \rightarrow q_0 1$	$q_1 < 0, 1 > \rightarrow q_1 0$
$q_0 < 1, 0 > \rightarrow q_0 1$	$q_1 < 1, 0 > \rightarrow q_1 0$
$q_0 < 1, 1 > \rightarrow q_1 0$	$q_1 < 1, 1 > \rightarrow q_1 1$



Задания для самостоятельного выполнения

4.1.1. Работа автомата задана с помощью совокупности четверок и выдает на выходе символ “*”, всякий раз, когда во входной последовательности алфавита $\{a, b\}$ встречается цепочка символов. Определите, что распознает автомат. Опишите работу автомата таблично.

0)

$q_0 b \rightarrow q_0 b$	$q_1 b \rightarrow q_2 b$	$q_2 b \rightarrow q_3 b$	$q_3 b \rightarrow q_0 b$
$q_0 a \rightarrow q_1 a$	$q_1 a \rightarrow q_0 b$	$q_2 a \rightarrow q_0 b$	$q_3 a \rightarrow *$

1)

$q_0 b \rightarrow q_1 b$	$q_1 b \rightarrow q_0 b$	$q_2 b \rightarrow q_3 b$	$q_3 b \rightarrow q_0 b$
$q_0 a \rightarrow q_0 b$	$q_1 a \rightarrow q_2 a$	$q_2 a \rightarrow q_0 b$	$q_3 a \rightarrow *$

2)

$q_0 a \rightarrow q_1 a$	$q_1 a \rightarrow q_2 a$	$q_2 a \rightarrow q_0 a$	$q_3 a \rightarrow q_0 a$
$q_0 b \rightarrow q_0 a$	$q_1 b \rightarrow q_0 a$	$q_2 b \rightarrow q_3 b$	$q_3 b \rightarrow *$

3)

$q_0 b \rightarrow q_1 b$	$q_1 b \rightarrow q_2 b$	$q_2 b \rightarrow q_0 b$	$q_3 b \rightarrow q_0 b$
$q_0 a \rightarrow q_0 b$	$q_1 a \rightarrow q_0 b$	$q_2 a \rightarrow q_3 a$	$q_3 a \rightarrow *$

4)

$q_0 a \rightarrow q_1 a$	$q_1 a \rightarrow q_2 a$	$q_2 a \rightarrow q_3 a$	$q_3 a \rightarrow q_0 a$
---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------

- 5) $q_0b \rightarrow q_0a$ $q_1b \rightarrow q_0a$ $q_2b \rightarrow q_0a$ $q_3b \rightarrow *$
- 6) $q_0b \rightarrow q_1b$ $q_1b \rightarrow q_2b$ $q_2b \rightarrow q_3b$ $q_3b \rightarrow q_0b$
 $q_0a \rightarrow q_0b$ $q_1a \rightarrow q_0b$ $q_2a \rightarrow q_0b$ $q_3a \rightarrow *$
- 7) $q_0a \rightarrow q_0a$ $q_1a \rightarrow q_0a$ $q_2a \rightarrow q_0a$ $q_3a \rightarrow q_0a$
 $q_0b \rightarrow q_1b$ $q_1b \rightarrow q_2b$ $q_2b \rightarrow q_3b$ $q_3b \rightarrow *$
- 8) $q_0b \rightarrow q_0b$ $q_1b \rightarrow q_0b$ $q_2b \rightarrow q_0b$ $q_3b \rightarrow q_0b$
 $q_0a \rightarrow q_1a$ $q_1a \rightarrow q_2b$ $q_2a \rightarrow q_3b$ $q_3a \rightarrow *$
- 9) $q_0a \rightarrow q_1a$ $q_1a \rightarrow q_0a$ $q_2a \rightarrow q_3a$ $q_3a \rightarrow q_0a$
 $q_0b \rightarrow q_0b$ $q_1b \rightarrow q_2b$ $q_2b \rightarrow q_0b$ $q_3b \rightarrow *$
- $q_0a \rightarrow q_0a$ $q_1a \rightarrow q_2a$ $q_2a \rightarrow q_3b$ $q_3a \rightarrow q_0a$
 $q_0b \rightarrow q_1b$ $q_1b \rightarrow q_0a$ $q_2b \rightarrow q_0a$ $q_3b \rightarrow *$

Решение:

Символы алфавита	С о с т о я н и я			
	q_0	q_1	q_2	q_3
a				
b				

4.1.2. Работа автомата задана таблично и выдает на выходе символ “&”, всякий раз, когда во входном алфавите встречается цепочка символов. Определите, что распознает автомат. Опишите работу автомата с помощью совокупности четверок.

0)

Символы входного алфавита	Состояния			
	q_0	q_1	q_2	q_3
O	q_0, O	q_2, O	q_0, O	q_0, O
K	q_1, K	q_0, O	q_0, O	q_0, O
T	q_0, O	q_0, O	q_3, T	$q_0 \&$

1)

Символы входного алфавита	Состояния			
	q_0	q_1	q_2	q_3
C	q_0, C	q_2, C	q_0, C	q_0, C
O	q_1, O	q_0, C	q_0, C	q_0, C

2)

<i>A</i>	q_0, C	q_0, C	q_3, A	$q_0 \&$
----------	----------	----------	----------	----------

Символы входного алфавита	Состояния			
	q_0	q_1	q_2	q_3
<i>M</i>	q_0, M	q_0, M	q_3, M	$q_0 \&$
<i>A</i>	q_0, M	q_2, A	q_0, M	q_0, M
<i>C</i>	q_1, C	q_0, M	q_0, M	q_0, M

3)

Символы входного алфавита	Состояния			
	q_0	q_1	q_2	q_3
<i>A</i>	q_0, A	q_2, A	q_0, A	q_0, A
<i>Д</i>	$q_1, Д$	q_0, A	q_0, A	q_0, A
<i>P</i>	q_0, A	q_0, A	q_3, P	$q_0 \&$

4)

Символы входного алфавита	Состояния			
	q_0	q_1	q_2	q_3
<i>O</i>	q_0, O	q_2, O	q_2, O	q_0, O
<i>P</i>	q_1, P	q_0, O	q_2, O	q_0, O
<i>M</i>	q_0, O	q_0, O	q_3, M	$q_0 \&$

5)

Символы входного алфавита	Состояния			
	q_0	q_1	q_2	q_3
<i>P</i>	q_0, P	q_0, O	q_3, P	$q_0 \&$
<i>M</i>	q_1, M	q_0, O	q_0, O	q_0, O
<i>И</i>	q_0, P	$q_2, И$	q_0, O	q_0, O

6)

Символы входного алфавита	Состояния			
	q_0	q_1	q_2	q_3
<i>A</i>	q_0, A	q_2, A	q_0, A	q_0, A
<i>П</i>	$q_1, П$	q_0, A	q_0, A	q_0, A
<i>P</i>	q_0, A	q_0, A	q_3, P	$q_0 \&$

7)

Символы входного алфавита	Состояния			
	q_0	q_1	q_2	q_3
<i>M</i>	q_0, M	q_0, M	q_3, M	$q_0 \&$
<i>И</i>	q_0, M	$q_2, И$	q_0, M	q_0, M
<i>P</i>	q_1, P	q_0, M	q_0, M	q_0, M

8)

Символы входного алфавита	Состояния			
	q_0	q_1	q_2	q_3
P	q_0, P	q_0, P	q_3, P	$q_0 \&$
У	q_0, P	$q_2, У$	q_0, P	q_0, P
T	q_1, T	q_0, P	q_0, P	q_0, P

9)

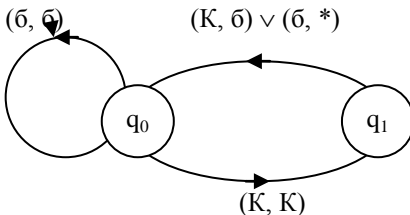
Символы входного алфавита	Состояния			
	q_0	q_1	q_2	q_3
Л	$q_0, Л$	$q_2, Л$	$q_0, Л$	$q_0, Л$
T	q_1, T	$q_0, Л$	$q_0, Л$	$q_0, Л$
Я	$q_0, Л$	$q_0, Л$	$q_3, Я$	$q_0 \&$

Решение:

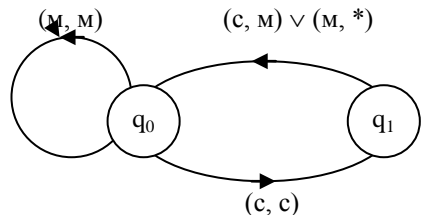
$q_0 \rightarrow$	$q_1 \rightarrow$	$q_2 \rightarrow$	$q_3 \rightarrow$
$q_0 \rightarrow$	$q_1 \rightarrow$	$q_2 \rightarrow$	$q_3 \rightarrow$
$q_0 \rightarrow$	$q_1 \rightarrow$	$q_2 \rightarrow$	$q_3 \rightarrow$

4.1.3. Работа автомата задана с помощью диаграммы и выдает на выходе символ “*”, всякий раз, когда во входном алфавите встречается цепочка символов. Определите, что распознает автомат. Опишите работу автомата с помощью совокупности четверок.

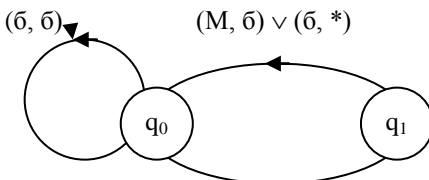
0)



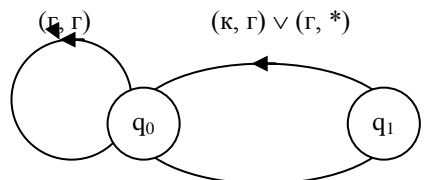
1)

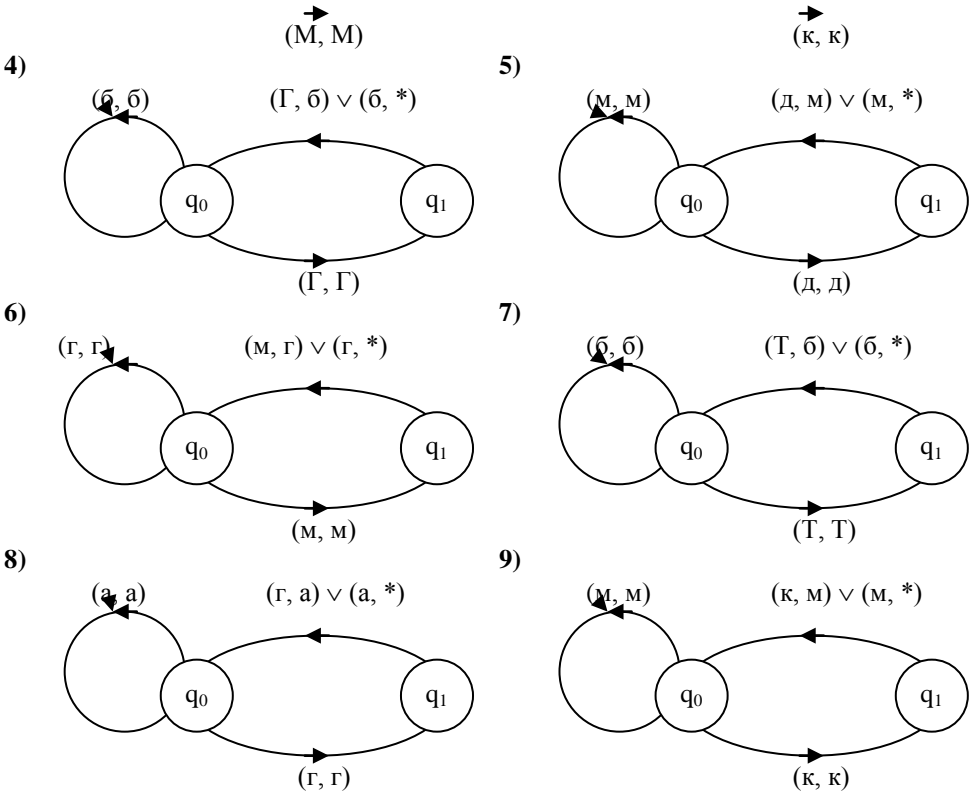


2)



3)





Решение:

$q_0 \rightarrow$	$q_1 \rightarrow$
$q_0 \rightarrow$	$q_1 \rightarrow$

Практическое занятие №14.

4.2. Задачи синтеза автоматов

Задача синтеза автоматов состоит в построении автомата с наперед заданным поведением или функционированием.

Примеры выполнения заданий

1. Постройте конечный автомат, воспринимающий на входе двоичную последовательность и выдающий на выходе специальный символ

‘ * ’, если во входной последовательности подряд встретится 4 единицы. В остальных случаях автомат на выходе повторяет входной символ.

Решение.

$$\begin{array}{llll} q_0 0 \rightarrow q_0 0 & q_1 0 \rightarrow q_0 0 & q_2 0 \rightarrow q_0 0 & q_3 0 \rightarrow q_0 0 \\ q_0 1 \rightarrow q_1 1 & q_1 1 \rightarrow q_2 1 & q_2 1 \rightarrow q_3 1 & q_3 1 \rightarrow q_0^* \end{array}$$

2. Постройте конечный автомат таблично, представляющий двоичный сумматор последовательного действия.

Решение. Обозначим через q_0 и q_1 его состояния, соответствующие отсутствию и наличию переноса.

Символы алфавита		Состояния	
x_1	x_2	q_0	q_1
0	0	$q_0, 0$	$q_0, 1$
0	1	$q_0, 1$	$q_1, 0$
1	0	$q_0, 1$	$q_1, 0$
1	1	$q_1, 0$	$q_1, 1$

Задания для самостоятельного выполнения

4.2.1. Постройте конечный автомат, выдающий на выходе символ “!”, всякий раз, когда во входной двоичной последовательности встречается:

- 0) последовательность 0000;
- 1) последовательность 1111;
- 2) последовательность 0110;
- 3) последовательность 0111;
- 4) последовательность 1000;
- 5) последовательность 0011;
- 6) последовательность 0010;
- 7) последовательность 1110;
- 8) последовательность 0001;
- 9) последовательность 1100.

4.2.2. Постройте конечный автомат, выдающий на выходе символ “♪”, всякий раз, когда во входной последовательности в алфавите

- 0) {А, н, ю, т} встречается имя “Анюта”;
- 1) {А, л, е, ш} встречается имя “Алеша”;
- 2) {И, р, н, а} встречается имя “Ирина”;
- 3) {С, а, ш} встречается имя “Саша”;
- 4) {Д, а, я, н} встречается имя “Даяна”;
- 5) {Н, и, а} встречается имя “Нина”;
- 6) {А, н, ж, е, л} встречается имя “Ангела”;
- 7) {А, н, т, о} встречается имя “Антон”;
- 8) {С, е, р, ж, а} встречается имя “Серезжа”;
- 9) {Л, и, я} встречается имя “Лилия”.

4.2.3. С помощью совокупности четверок и диаграммы опишите работу автомата, представляющего троичный сумматор последовательного действия.

4.2.4. Постройте конечный автомат таблично, складывающий:

- 0) четные натуральные числа в D_5 ;
- 1) нечетные натуральные числа в D_8 ;
- 2) натуральные числа в D_4 ;
- 3) нечетные натуральные числа в D_6 ;
- 4) четные натуральные числа в D_6 ;
- 5) нечетные натуральные числа в D_5 ;
- 6) четные натуральные числа в D_7 ;
- 7) натуральные числа в D_3 ;
- 8) четные натуральные числа в D_8 ;
- 9) нечетные натуральные числа в D_7

Решение.

[illegible]

4.2.5. Постройте конечный автомат таблично, сравнивающий два числа x_1 и x_2 , заданные в двоичной системе счисления. При совпадении разрядов на выходе формируется сигнал 0, иначе 1. $X = \{00, 01, 10, 11\}$, $Y = \{0, 1\}$.

Решение.

Функционирование системы определяется двумя состояниями:

$Q = \{q_0, q_1\}$, где q_0 – состояние, соответствующее равенству разрядов, иначе q_1 .

Символы алфавита		Состояния	
x_1	x_2	q_0	q_1

Практическое занятие №15.

Глава 5. Алгоритмы

5.1. Способы описания алгоритмов

К основным изобразительным средствам алгоритмов можно отнести следующие способы записи:

- словесная;
- словесно-формульная;
- в графическом виде (в виде блок-схем);
- в виде текста программы на алгоритмическом языке.

Примеры выполнения заданий

1. Опишите в словесной форме алгоритм вычисления значения логической функции, реализующую операцию конъюнкции:

$$f(x, y) = \begin{cases} \text{true, если } x = 1, y = 1; \\ \text{false, в остальных случаях} \end{cases}$$

Решение.

1. Ввести значения аргументов x и y . Перейти к п. 2.
2. Проверить, x равно 1 и y равно 1? Если да, то выдать сообщение: 'Значение функции равно true', перейти к п. 4, иначе перейти к п. 3.
3. Проверить, x равно 1 и y равно 0 или x равно 0 и y равно 1 или x равно 0 и y равно 0? Если да, то выдать сообщение: 'Значение функции равно false', перейти к п. 4, иначе выдать сообщение об ошибке ввода.
4. Завершить процесс.

2. Опишите пример 1 в словесно-формульной форме.

1. Ввести значения аргументов x и y . Перейти к п. 2.
2. Проверить, $x = 1$ и $y = 1$? Если да, то выдать сообщение: 'Значение функции равно true', перейти к п. 4, иначе перейти к п. 3.
3. Проверить, $x = 1$ и $y = 0$ или $x = 0$ и $y = 1$ или $x = 0$ и $y = 0$? Если да, то выдать сообщение: 'Значение функции равно false', перейти к п. 4, иначе выдать сообщение об ошибке ввода.
4. Завершить процесс.

3. Опишите пример 1 в виде текста программы на алгоритмическом языке.

Program func;

var x, y: integer;

begin

writeln ('Введите значения двух аргументов функции (0/1)'); readln (x, y);

if (x = 1) and (y = 1) then write ('Значение функции равно true');

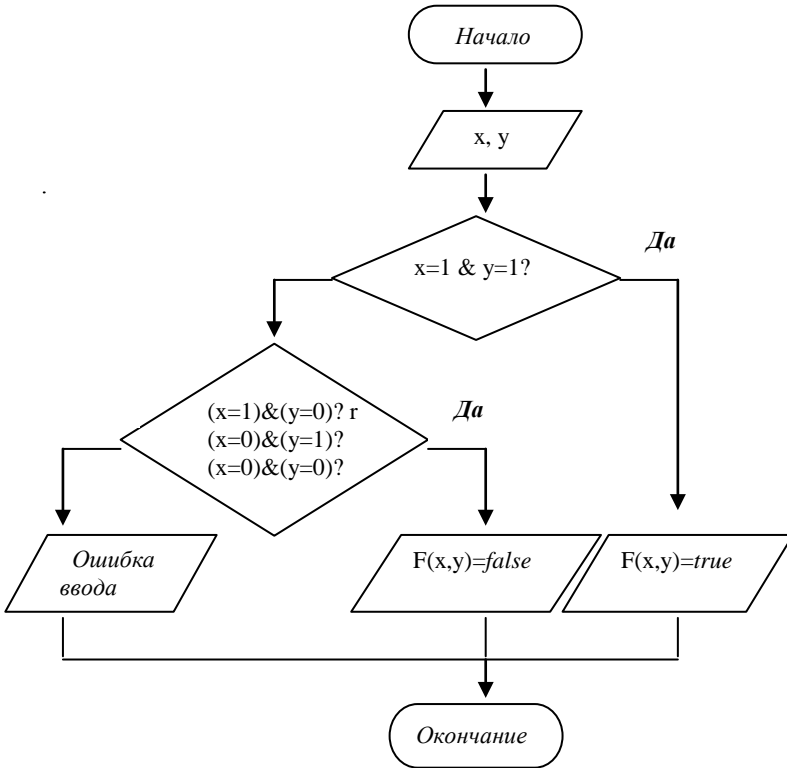
if (x = 1) and (y = 0) or (x = 0) and (y = 1) or (x = 0) and (y = 0)

then write ('Значение функции равно false')

else write ('Ошибка ввода')

end.

5. Опишите пример 1 в виде блок-схемы



Задания для самостоятельного выполнения

5.1.1. Опишите алгоритмы в словесной форме:

1. Переменной d присваивают длину окружности, площадь круга и объем шара одного и того же заданного радиуса.
2. Даны произвольные числа a, b, c . Если нельзя построить треугольник с такими длинами сторон, то напечатать 0, иначе напечатать 3 - если треугольник равносторонний, 2 - если треугольник равнобедренный или 1 - в противном случае.
3. Даны целые числа k и m , действительные числа x, y, z . При $k < m^2$, $k = m^2$ или $k > m^2$, замените модулем соответственно значения x, y, z , а два других уменьшить на 0.5.

5.1.2. Опишите алгоритмы в словесно-формульной форме:

1. Даны два числа a и b . Обменяйте их значениями, не используя третьей переменной.

2. Для заданного числа a найдите корень уравнения $f(x)=0$, где:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin 2ax, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ a^3 x - 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

3. Найдите корни квадратного уравнения, если заданы коэффициенты a , b , c .
4. Вычислите площадь треугольника по заданным сторонам, если это возможно.
5. Даны действительные числа x , y , z . Вычислите: $\max(\min(y + z, x * y), y + e^x)$.
6. Дано число a . Определите первый отрицательный член и его номер в последовательности x_1, x_2, \dots, x_n , где $x_1 = a$, $x_n = \operatorname{tg}(x_{n-1})$.

5.2. Виды алгоритмов

5.2.1. Линейные алгоритмы

Алгоритмы могут описывать три вида процессов обработки информации, существующих в природе: *линейные, разветвляющиеся и циклические*.

Процесс обработки информации называется *линейным*, если действия выполняются в линейной последовательности их записи (см. рис.5.1)

Примеры выполнения заданий

1. Опишите графическим способом алгоритм расчета нормы расхода гербицида (л/га) по формуле: $N = \frac{W \cdot n \cdot 600}{V \cdot D}$.

Решение.

На рис. 5.2. приведена блок-схема решения задачи.

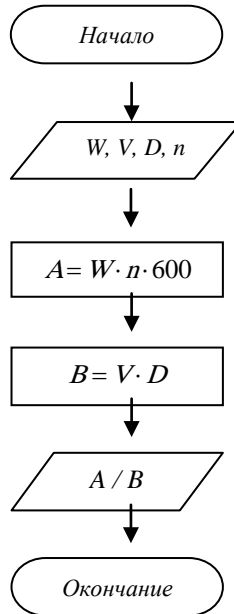
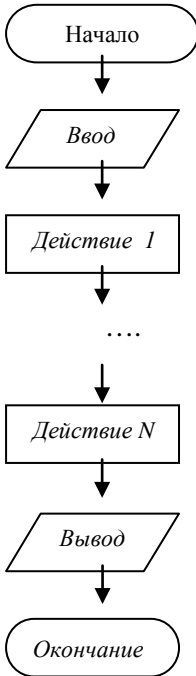


Рис. 5.1. Блок-схема линейного процесса обработки информации

Рис. 5.2. Блок-схема алгоритма задачи 1

Задания для самостоятельного выполнения

1. Опишите алгоритмы в графической форме, в которых переменной d присваивают:

- 0) длину окружности, площадь круга и объем шара одного и того же заданного радиуса;
- 1) периметр и площадь прямоугольного треугольника по длинам двух катетов;
- 2) площадь и периметр некоторого треугольника по координатам трех вершин;
- 3) длину третьей стороны и площадь треугольника по длинам двух сторон и углу (в градусах) между ними;
- 4) произведение цифр заданного четырехзначного числа;

- 5) дробную часть среднего геометрического трех заданных положительных чисел;
- 6) корень уравнения: $\arctg(1 + \ln x) = \sqrt{2}$;
- 7) корень уравнения: $\arcsin(1 + \ln x) = \frac{1}{e^x}$;
- 8) расстояние между точками с координатами A(x1,y1) и B(x2,y2);
- 9) площадь треугольника со сторонами a, b, c.

2. Опишите алгоритмы в графической форме. Даны положительные вещественные числа x и y . Присвойте целой переменной z :

- 0) сумму цифр из дробной части чисел x и y ;
- 1) произведение второй и третьей цифр дробной части числа x ;
- 2) сумму цифр целой части числа x ;
- 3) куб разности третьей и второй цифр целой части числа x ;
- 4) произведение вторых цифр из дробной части двух чисел x и y ;
- 5) абсолютную часть разности целых частей чисел x и y ;
- 6) квадрат разности второй и первой цифр из дробной части числа x ;
- 7) сумму третьих цифр из дробной части чисел x и y ;
- 8) целую часть от квадратного корня суммы первых цифр чисел x и y ;
- 9) целую часть частного вторых цифр из дробной части чисел x и y .

5.2.2. Разветвляющиеся алгоритмы

Процесс обработки информации называется *разветвляющимся*, если в зависимости от проверки некоторого условия предусмотрен выбор по двум направлениям.

Алгоритм, описывающий разветвляющийся процесс представлен на рис. 5.3.

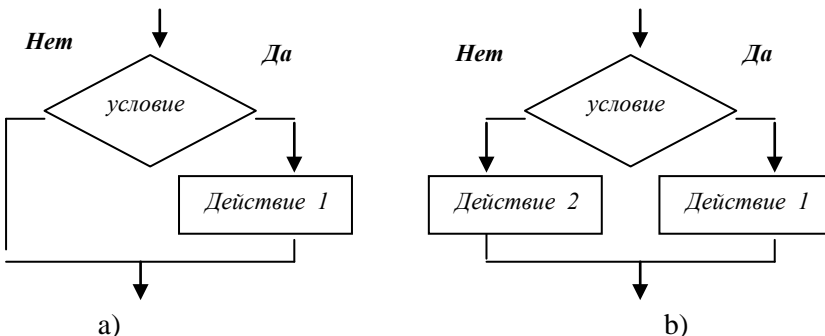


Рис. 5.3. Блок-схема разветвляющегося процесса обработки информации:

- а) краткая форма вида “Если ..., то ...”;
 б) полная форма вида “Если ..., то ..., иначе”.

Примеры выполнения заданий

1. Опишите графическим способом алгоритм вычисления значения

выражения:
$$Z = \frac{\sqrt{ax^3 + e^x}}{\ln(x + a)}$$

Предполагается, что выражение знаменателя дроби $(x + a)$ больше нуля.

Решение: на рис. 5.4. приведена блок-схема решения задачи.

2. Даны действительные числа x , y и z . Составьте блок-схему алгоритма вычисления: $\max(\min(x^2 + y, z^2), z^3 - e^y)$.

Решение: на рис. 5.5. приведена блок-схема решения задачи.

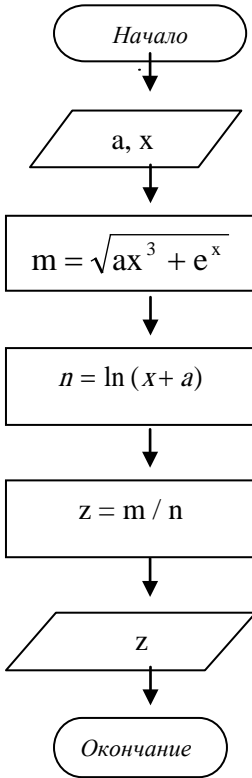


Рис. 5.4. Блок-схема решения задачи 1

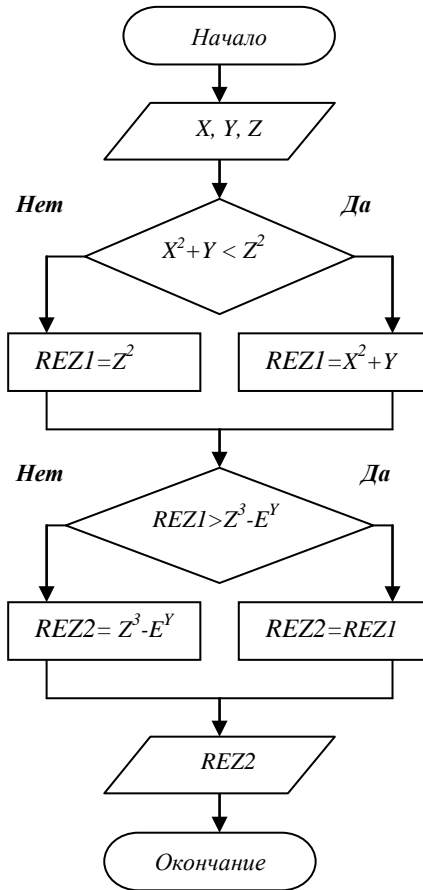


Рис. 5.5. Блок-схема решения задачи 2

Задания для самостоятельного выполнения

Опишите алгоритмы в графической форме для следующих задач:

1. Даны произвольные числа a, b, c . Если нельзя построить треугольник с такими длинами сторон, то напечатать 0, иначе напечатать 3 - если треугольник равносторонний, 2 - если треугольник равнобедренный или 1 - в противном случае.

2. Даны целые числа k и m , действительные числа x , y , z . При $k < m^2$, $k = m^2$ или $k > m^2$, замените модулем соответственно значения x , y , z , а два других уменьшить на 0.5.

3. Для заданного числа a найдите корень уравнения $f(x)=0$, где:

$$0) \quad f(x) = \begin{cases} \sin ax, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ a^2 x + 1, & \text{иначе} \end{cases} \quad 1) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 20a, & \text{если } 0 < x < a; \\ \sqrt{ax^5} + 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x^3}{a+5}, & \text{если } x > 0 \\ \frac{ax^4 - 1}{a}, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a^3}{x-1}, & \text{если } x > 1 \\ \frac{x^4 - 3}{a}, & \text{иначе} \end{cases};$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} a - \sin x^2, & \text{если } 0 < x < 1; \\ \cos^2 ax, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a^2}{x} \sin ax, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ x^3 - 4a + 5, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8ax - 6, & \text{если } x \leq 2 \\ \frac{1}{a^2 x + 6x - 12}, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 7) \quad f(x) = \begin{cases} a^3 - \sin x^2, & \text{если } 0 < x < a; \\ x^5 - \frac{a}{25} \sqrt{xa}, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$8) \quad f(x) = \begin{cases} a\sqrt{|x-1|}, & \text{если } x > 1 \\ 1 + \frac{x^4}{\sqrt[3]{a}}, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 9) \quad f(x) = \begin{cases} \cos\left(ax - \frac{\pi}{6}\right), & \text{если } x > a; \\ \sin(ax^2 + \pi), & \text{иначе} \end{cases}$$

4. Даны действительные числа x , y и z . Вычислите:

- 0) $\max(\min(y + z, x * y), e^{(x+y)})$;
- 1) $\max(x, y/z) / \min^3(y, z)$;
- 2) $\min^2(x + y - z, x/y * z)$;
- 3) $\max(x + y, z^2) / \min(x, y + z)$;
- 4) $\max(x^3 + z, \min(x * z, y/z))$;
- 5) $\max^2(x, y, z) / (x * y + z)$;
- 6) $(x * y * z) / \min^2(x, y, z)$;

- 7) $\min (x / y, y / z) * \max (x, y);$
 8) $\max (e^{(y+z)}, \min (x^2, y^3, z^4));$
 9) $\min (\max (x^2 + y, x + z^3), x^2 + z^2).$

Где \max – максимальное значение, а \min – минимальное значение.

Практическое занятие №16.

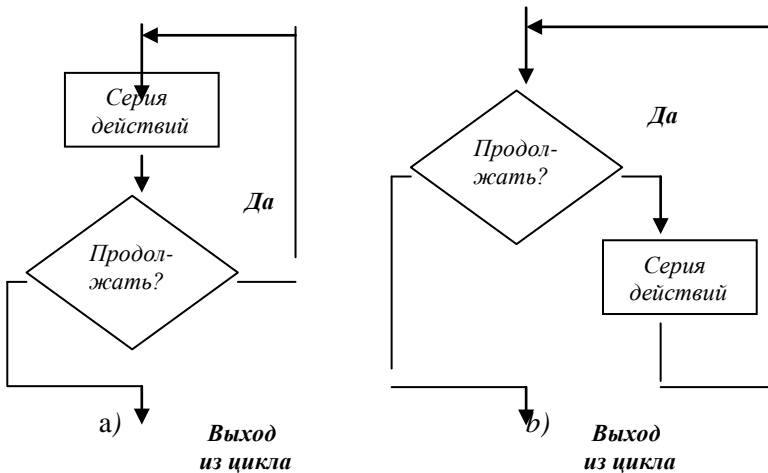
5.2.3. Циклические алгоритмы

Процесс обработки информации называется *циклическим*, если существуют многократно повторяемые последовательности шагов процесса (серия действий). Эта последовательность шагов называется *циклом*.

Иногда возникает ситуация организации “бесконечного цикла”, в таком случае принято говорить, что процесс “зацикливается”. В этом случае необходимо задать управление циклом. Существуют несколько вариантов управления циклом посредством задания условий продолжения и завершения.

Графическая схема управления циклическим процессом посредством задания условия продолжения выполнения вычислительного процесса: :

а) цикл с проверкой постусловия; б) цикл с проверкой предусловия.

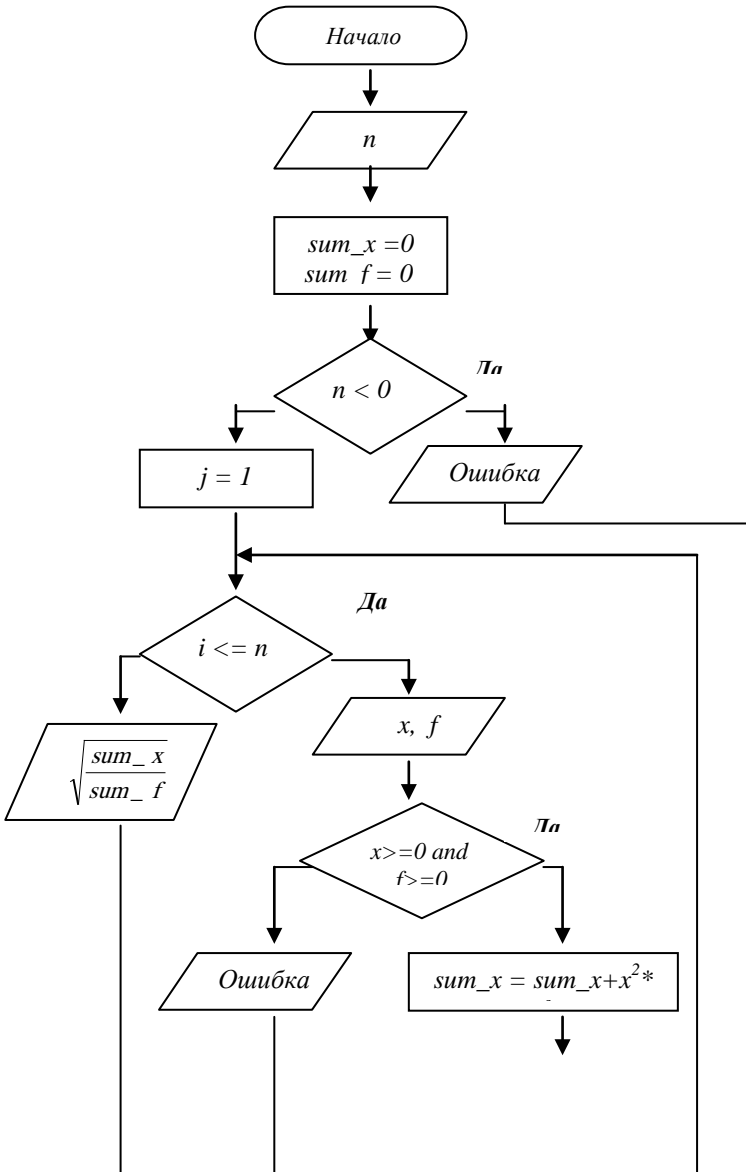


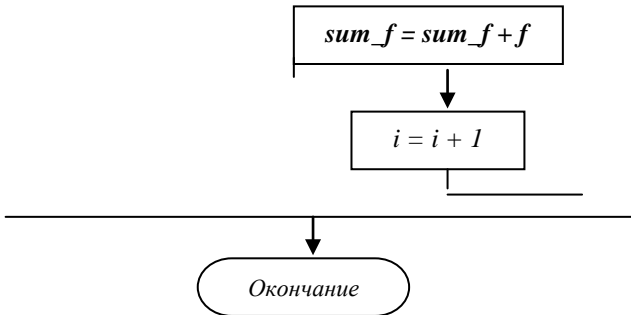
Примеры выполнения заданий

1. Составьте блок-схему алгоритма вычисления среднеквадратической взвешенной по формуле:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot f}{\sum f}}$$

Решение: на рисунке приведен алгоритм решения задачи:





2. Составьте блок-схему алгоритма вычисления суммы кубов последовательности, состоящей из положительных чисел до первого введенного отрицательного числа.

Решение: на рис. 5.8. приведен алгоритм решения задачи.

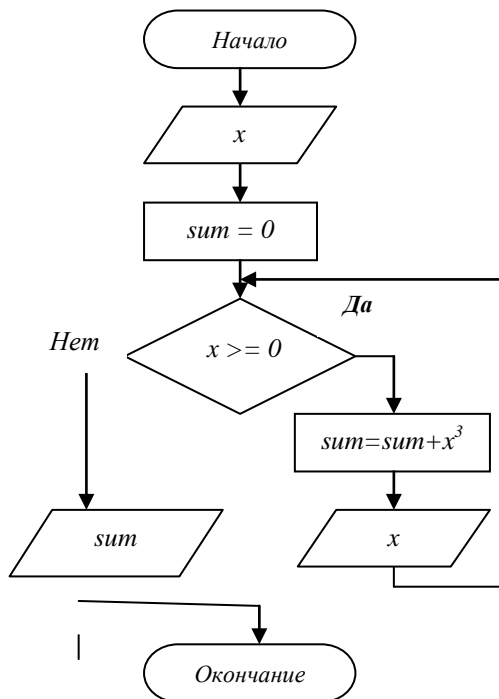


Рис. Схема решения задачи 2

Задания для самостоятельного выполнения

Опишите алгоритмы в графической форме для следующих задач:

1. Дано число a . Определите первый отрицательный член и его номер в последовательности x_1, x_2, \dots, x_n , где $x_1 = a$,

- | | |
|---|---|
| 0) $x_n = 1/n + x_n \cdot \operatorname{tg}(x_{n-1})$; | 5) $x_n = \operatorname{tg}(x_{n-1}) / \operatorname{Sin}(x_n)$; |
| 1) $x_n = \operatorname{Cos}(x_{n-1}) / 2$; | 6) $x_n = 1/n \cdot \operatorname{tg}(x_{n-1})$; |
| 2) $x_n = \operatorname{Sin}(x_{n-1}) \cdot 1.5$; | 7) $x_n = \operatorname{Cos}(x_{n-1}) / \operatorname{Sin}(x_n)$; |
| 3) $x_n = \operatorname{tg}(x_{n-1}) / \operatorname{Cos}(x_n)$; | 8) $x_n = n x_{n-1} + \operatorname{tg}(x_{n-1})$; |
| 4) $x_n = (1 + x_n) / \operatorname{tg}(x_{n-1})$; | 9) $x_n = \operatorname{tg}(x_{n-1}) - 2 / \operatorname{Cos}(x_n)$. |

2. Вычислите сумму n -го количества слагаемых $S = \sum_n a_n(x)$ при различных значениях параметра суммирования x , где общий член суммы имеет вид:

- | | | |
|---|---|--|
| 0) $\frac{n \cdot x^3}{2n!}$; | 1) $(-1)^5 \cdot \frac{n^2 \cdot x^3}{(2n+1)!}$; | 2) $(-1)^7 \frac{\operatorname{Cos} nx}{n^2}$; |
| 3) $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; | 4) $\frac{\operatorname{Cos} nx}{n}$; | 5) $\frac{n \cdot x^3}{(n+1)!}$. |
| 6) $\frac{\operatorname{Sin}(2n-1)x}{2n-1}$; | 7) $\frac{\operatorname{Cos} 2nx}{4n^2 - 1}$; | 8) $\frac{n^2 + 1}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3$; |
| 9) $\frac{n \cdot x^4}{4n+1}$; | | |

3. На выставке собак отбор животных различных пород производился по возрасту и высоте холки. Определите, сколько было боксеров 2-4 летнего возраста с высотой холки не менее 50 см.

4. В очереди за билетами стоят мужчины и женщины. Определите, какое количество мужчин стоит в начале очереди до первой женщины.

5. По итогам Олимпийских игр известно: n - количество команд-участниц, $m[I]$ - количество участников в каждой команде, k_z – количество золотых, k_s - серебряных и k_b - бронзовых медалей в каждой команде. Определите:

0) общее число участников и медалей в каждой команде и всего на играх;

- 1) упорядочите список команд по количеству золотых медалей;
 - 2) процентное соотношение общего количества золотых медалей к общему числу медалей;
 - 3) число очков, набранное командами, если за золотую медаль получают 7 очков;
 - 4) упорядочите список команд по количеству серебряных медалей;
 - 5) число очков, набранное командами, если за серебряную медаль получают 6 очков;
 - 6) процентное соотношение общего количества серебряных медалей к общему числу медалей;
 - 7) упорядочите список команд по количеству бронзовых медалей;
 - 8) число очков, набранное командами, если за бронзовую медаль получают 5 очков;
 - 9) процентное соотношение общего количества бронзовых медалей к общему числу медалей.
- 6.** Вводится последовательность чисел, 0 – конец ввода, определите:
- 0) разность между максимальным и минимальным из них, а также выведите порядковые номера этих чисел;
 - 1) образуют ли они возрастающую последовательность;
 - 2) порядковый номер того из них, которое наиболее близко к заданному числу;
 - 3) наименьшее из всех отрицательных чисел;
 - 4) сколько среди них отличных от первого числа;
 - 5) напечатайте сначала все отрицательные из них, а затем все остальные;
 - 6) сколько раз в этой последовательности меняется знак. (Например, в последовательности 1, -67, 65, 12, -89 знак меняется 3 раза);
 - 7) является ли последовательность знакопеременной, например, -26 56 – 106 1;
 - 8) сколько раз появляется заданное число, если нет, то сообщите об этом;
 - 9) сколько отрицательных, нулевых и положительных чисел содержится в данной последовательности.
- 7.** Вычислите значения функции $F(X)$ на отрезке $[A, B]$ в точках $X_i = A + iH$, где $H = (B - A)/M$, M – заданное целое число, если:

N_i	$F(X)$	A	B	M
0)	$x \cdot \sin(x)$	0	$2/\pi$	10
1)	$\sin(1/x)$	$\pi/8$	$\pi/2$	15

2)	$\cos(x^2)$	$\pi/3$	$3\pi/2$	20
3)	$\operatorname{Tg}(x/2) + \cos(x)$	$\pi/2$	π	10
4)	$\operatorname{Ctg}(x/3) + \sin(x)$	$\pi/4$	$\pi/2$	15
5)	$\operatorname{Arcsin}(x)$	0	1	20
6)	$\sin(x/4)/2$	$\pi/2$	π	15
7)	$\sin(x^2)$	$\pi/6$	$2\pi/3$	10
8)	$\cos(1/x)$	$\pi/4$	$4/\pi$	20
9)	$\operatorname{Arctg}(x)$	2	7	15

8. Дан двумерный массив $A(m, n)$. Постройте и выведите на экран одномерный массив $B(n)$ элементы которого равны:

0) сумме элементов в строках с нечетными номерами;

1) $b_i = \max \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\}, \quad i = 1, 2, \dots, m;$

2) сумме элементов в столбцах с четными номерами;

3) $b_i = \prod_{j=1} a_{i,j}$ для всех таких j , что $1 < a_{i,j} < n$.

4) разности элементов в строках с нечетными номерами;

5) $b_i = \sum_{l=1}^m |a_{i,l}|.$

6) разности элементов в столбцах с четными номерами;

7) произведению элементов в столбцах с четными номерами;

8) $b_i = \prod_{j=1}^m a_{j,i}.$

9) $b_i = \min \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n..$

9. Вычислите значение выражения:

0) $\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{i-j+1}{i+j},$ если $n=100, m=80;$

1) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m n \cdot \sin(i^3 + j^4),$ если $n=60, m=20;$

2) $\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{23 \cdot i + j^4}{m \cdot i},$ если $n=50, m=25;$

$$3) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{i+j}{5 \cdot j + i^3} \right) \cdot n, \text{ если } n=25, m=15;$$

$$4) \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^3 \cdot j^4}{n \cdot m}, \text{ если } n=100, m=100;$$

$$5) \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{(i-j)^3}{m-n}, \text{ если } n=50, m=55;$$

$$6) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{i^2 + j^3}{i^3 + j^4}, \text{ если } n=50, m=51;$$

$$7) \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{|i-j|}{|(i+j)^2|}, \text{ если } n=70, m=35.$$

$$8) \frac{n^2 + m^2}{\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sqrt{i+j}}, \text{ если } n=70, m=35;$$

$$9) \frac{\sum_{i=1}^n |i| \cdot n}{\sum_{j=1}^m |j| \cdot m}, \text{ если } n=100, m=100;$$

0)

Рекомендуемая литература

1. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы.- М: Лаборатория Базовых Знаний, 2003
2. Верещагин Н.К., Лекции по математической логике и теории алгоритмов в 3-х т. МЦНМО
3. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики - М.: Наука, 2003.
4. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики: информатика и математика.- М: Наука. Изд.фирма «Физ.-мат.лит», 2001
5. Гульден Я., Джексон Д. "Перечислительная комбинаторика", - М.: Наука, 2004.
6. Иванов Б.Н. Дискретная математика: алгоритмы и программы. Лаборатория Базовых Знаний, 2003
7. Карпов В.Г., Мощенский В.А. Математическая логика и дискретная математика. – Минск: Вышэйш. школа, 2001
8. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 2001
9. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 2001
10. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 2004.
11. Лихтарников Л.М, Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. – СПб: Лань, 2001
12. Лорьер Ж.Л. Системы искусственного интеллекта. – М.: Мир, 2001.
13. Мальцев А.И. "Алгоритмы и рекурсивные функции", - М.: Наука, 2005.
14. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: Издательство МАИ, 2002.
15. Новиков Ф. Дискретная математика для программистов. - СПб: Питер, 2000
16. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 2001.
17. Риордан Дж. "Введение в комбинаторный анализ", - М.: ИЛ. 2003.
18. Романовский И.В. Дискретный анализ. – СПб: Невский диалект, 2003
19. [Фляйшнер Г.](#) Эйлеровы графы и смежные вопросы – М.: Мир, 2002
20. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 2001